

## **DOS MODELOS DE SOSTENIBILIDAD EN EL SISTEMA DE REPARTO DE LAS PENSIONES DE JUBILACIÓN DE PRESTACIÓN DEFINIDA**

### **TWO MODELS OF SUSTAINABILITY IN THE DEFINED BENEFIT PAY- AS-YOU-GO (DB-PAYG) SCHEME WITH RETIREMENT BENEFITS**

**Luis María Sáez de Jáuregui Sanz**

Presidente del Instituto de Actuarios Españoles. España

#### **Resumen**

En este trabajo se formulan dos modelos de sostenibilidad de las pensiones de jubilación de prestación definida en el marco de un sistema público de pensiones. El primer modelo permite analizar aisladamente el efecto de la evolución de la esperanza de vida, cuantificando el impacto que el envejecimiento de la población tiene sobre las pensiones. En el segundo modelo se formulan y se hallan los parámetros de productividad en el sistema de reparto, para el caso español y para el periodo 1975-2048, en un contexto de sostenibilidad.

#### **Palabras clave**

Factor de sostenibilidad; Jubilación; Reforma de pensiones; Sistema público de pensiones; Esperanza de vida; Prestación definida; Sistemas de reparto y de capitalización.

## **Abstract**

In this paper there are two models of sustainability of the defined benefits old-age pensions in the framework of a public pension system. The first model allows us to analyze the effect of the evolution of the life expectancy, quantifying the impact that the aging of the population has on the old-age pensions. In the second model, we find out the parameters of productivity in the defined benefit pay-as-you-go (DB PAYG) scheme with retirement benefits for the Spanish case for the period 1975-2048 in a context of sustainability.

## **Keywords**

Sustainability factor; Retirement; Pension Reform; Public Pensions System; Life Expectancy; Defined Benefit; Funded and unfunded Systems (PAYG).

## **1. Marco normativo del factor de sostenibilidad**

El denominado factor de sostenibilidad del sistema de seguridad social se introduce en 2011 por primera vez en el ordenamiento jurídico español a través de la Ley 27/2011<sup>1</sup>, de 1 de agosto, sobre actualización, adecuación y modernización del sistema de Seguridad Social, como consecuencia de las recomendaciones de la Comisión del Pacto de Toledo, de modo que, a partir de 2027, los parámetros fundamentales del sistema se revisarán por las diferencias entre la evolución de la esperanza de vida a los 67 años de la población en el año en que se efectúe la revisión y la esperanza de vida a los 67 años en 2027, indicándose que dichas

---

<sup>1</sup> Ley 27/2011, de 1 de agosto, sobre actualización, adecuación y modernización del sistema de Seguridad Social.

revisiones se efectuarán cada cinco años<sup>2</sup>. Previamente, el tercer párrafo del preámbulo de la Ley 27/2011 nos alerta de que el sistema de seguridad social tiene que seguir haciendo frente a importantes desafíos, afrontando a largo plazo las exigencias derivadas, entre otras, de las tendencias de evolución demográfica, a fin de garantizar la sostenibilidad financiera de aquél<sup>3</sup>.

---

<sup>2</sup> El artículo 8 de la Ley 27/2011, relativo al factor de sostenibilidad del sistema de la Seguridad Social, introduce una nueva disposición adicional, la quincuagésima novena, en el Texto Refundido de la Ley General de la Seguridad Social, aprobado por Real Decreto Legislativo 1/1994, de 20 de junio, con la siguiente redacción: *“Con el objetivo de mantener la proporcionalidad entre las contribuciones al sistema y las prestaciones esperadas del mismo y garantizar su sostenibilidad, a partir de 2027 los parámetros fundamentales del sistema se revisarán por las diferencias entre la evolución de la esperanza de vida a los 67 años de la población en el año en que se efectúe la revisión y la esperanza de vida a los 67 años en 2027. Dichas revisiones se efectuarán cada 5 años, utilizando a este fin las previsiones realizadas por los organismos oficiales competentes.”*

<sup>3</sup> Continúa el preámbulo subrayando que el hecho incuestionablemente positivo de que la esperanza de vida aumente progresivamente en España, hasta haberse convertido en el segundo país del mundo con mayor pervivencia de la población, enfrenta también el reto de que, en el futuro, será necesario asumir el pago de más pensiones durante más tiempo a causa de dicho envejecimiento, indicando que la disminución prolongada de las tasas de natalidad y el simultáneo incremento de la esperanza de vida de las personas mayores está provocando una inversión de la estructura de la pirámide de población, aumentando el número de pensionistas en relación con la población activa, esto es, variando la tasa de dependencia de los pensionistas, señalándose, no sorpresivamente, que, de no modificarse, aún parcialmente, esta tendencia mediante el incremento de las tasas de natalidad y de los flujos migratorios, la misma se acentuará en las próximas décadas por la propia evolución demográfica, e indicándose que dicha tendencia afecta a todas las generaciones, pero sobre todo a las más jóvenes por el hecho de que serán éstas las que serán mayores de sesenta y cinco años durante más tiempo.

Es en la Ley Orgánica 2/2012<sup>4</sup> donde se le otorga una importancia superlativa<sup>5</sup> al factor de sostenibilidad<sup>6</sup>. Y así, en su capítulo IV, relativo a las medidas preventivas, correctivas y coercitivas, en su sección 1ª, sobre medidas preventivas, y dentro del artículo 18 de medidas automáticas de prevención, se establece que el Gobierno, en caso de proyectar un déficit en el largo plazo del sistema de pensiones, revisará el sistema aplicando de forma automática el factor de sostenibilidad en los términos y condiciones previstos en la Ley 27/2011. Por último, mediante la disposición adicional novena del Real Decreto-ley 5/2013<sup>7</sup> se encomienda al Gobierno la creación de un comité de expertos independientes para que elabore un informe sobre el factor de sostenibilidad del sistema de seguridad social, para su remisión a la Comisión del Pacto de Toledo en línea con lo previsto en la disposición adicional quincuagésima novena del texto refundido de la Ley General de la Seguridad Social, introducida por la Ley 27/2011.

---

<sup>4</sup> Ley Orgánica 2/2012, de 27 de abril, de Estabilidad Presupuestaria y Sostenibilidad Financiera.

<sup>5</sup> Los tres objetivos de la Ley Orgánica 2/2012 son: (i) garantizar la sostenibilidad financiera de todas las Administraciones Públicas; (ii) fortalecer la confianza en la estabilidad de la economía española; y (iii) reforzar el compromiso de España con la Unión Europea en materia de estabilidad presupuestaria. Subraya la ley que el logro de estos tres objetivos contribuirá a consolidar el marco de la política económica orientada al crecimiento económico y la creación del empleo.

<sup>6</sup> Indica la propia Ley Orgánica 2/2012 que su primera novedad es su propio título, ya que incorpora la sostenibilidad financiera como principio rector de la actuación económico-financiera de todas las Administraciones Públicas españolas. Con ello se pretende reforzar la idea de estabilidad, no solo en un momento coyuntural, sino con carácter permanente, lo que contribuirá a preparar el camino para los retos a los que nuestro sistema de bienestar se enfrenta a medio y largo plazo.

<sup>7</sup> Real Decreto-ley 5/2013, de 15 de marzo, de medidas para favorecer la continuidad de la vida laboral de los trabajadores de mayor edad y promover el envejecimiento activo.

## 2. El porqué del factor de sostenibilidad

Definimos el factor de sostenibilidad como un mecanismo automático de ajuste vinculado al aumento de la esperanza de vida que se aplica a los parámetros que sirven para la determinación de las pensiones. Este mecanismo actúa, fundamentalmente, sobre el importe de la pensión, sobre la edad de jubilación o sobre los años de cotización necesarios para obtener el importe íntegro de la pensión. Establecemos como antecedentes de la definición de factor de sostenibilidad a los denominados ABM (*Automatic Balance Mechanisms*). Los ABM son mecanismos determinados por ley para ser aplicados de manera automática e inmediata, conforme a indicadores de solvencia y de sostenibilidad, siendo su propósito, una vez aplicados, reestablecer el equilibrio financiero de los sistemas de reparto de prestación definida, con el objetivo de hacerlos viables sin la intervención del legislador. Indican Vidal *et al.* (2009) que, de acuerdo con la *American Academy of Actuaries*, la primera propuesta de un ABM para los sistemas de reparto provino del actuario Robert J Myers (*Head of the Nacional Commission for Social Security Reform in the United States*) en 1982.

El factor de sostenibilidad ya se está imponiendo en países de la Unión Europea. Así, países como Alemania, Dinamarca, Finlandia, Francia, Grecia, Holanda, Hungría, Italia, Portugal y Suecia ya cuentan con factores de sostenibilidad o mecanismos de sostenibilidad automática de sus pensiones de jubilación. Devesa *et al.* (2012) realizan un análisis exhaustivo sobre cómo se aplica el factor de sostenibilidad en Europa<sup>8</sup>.

---

<sup>8</sup> Un resumen de los mecanismos de ajuste en cada país es el siguiente:

1. Reformas que vinculan distintos parámetros a la evolución de la esperanza de vida:

a) Vinculación de las edades de jubilación: el objetivo es que la esperanza de vida en el momento de la jubilación sea constante: (i) En Italia, desde los 65 años actuales, los ajustes serán cada tres años, empezando en 2013, y se basarán en

---

datos medios del último trienio respecto a los del trienio anterior. (ii) En Grecia se establece que a partir de 2021 se ajustarán de forma automática las edades mínima y ordinaria de jubilación a los cambios en la esperanza de vida, siendo los ajustes cada tres años. (iii) En Dinamarca quedará fijada en 67 años en 2022 y luego se vincula a la evolución de la esperanza de vida a los 60 años tomando como base la del año 2020 y con un desfase de 5 años. El automatismo de esta vinculación no es total porque debe ser confirmada por el Parlamento 10 años antes de tener efecto. (iv) En Holanda está previsto aumentar la edad de jubilación hasta 66 años en 2020 y luego vincularla a la esperanza de vida, a la vez que los aumentos se deberán anunciar con 11 años de antelación a su entrada en vigor empezando en 2014 para que entre en vigor en 2025.

b) Vinculación del requisito de años cotizados para el 100% de la pensión: se persigue que la ratio entre años cotizados y años de cobro de pensión (esperanza de vida) se mantenga constante: (i) Francia, desde 2009, incluye un mecanismo de ajuste de los años cotizados al ritmo del aumento de la esperanza de vida a los 61 años. En 2008 eran necesarios 40 años y se prevé que la generación nacida en 1960 tenga que cotizar 41,5 años como consecuencia de la mejora en la esperanza de vida. (ii) Italia ha incorporado esta vinculación para el caso de años cotizados mínimos para acceder a la jubilación anticipada a partir de 2013 y con el mismo mecanismo de vinculación que el comentado más arriba para la edad de jubilación.

c) Vinculación directa de la cuantía de la pensión: la idea es que los aumentos de la esperanza de vida se compensen mediante una menor cuantía de la pensión inicial de manera que el valor actual actuarial de las pensiones futuras sea constante. (i) Finlandia, en 2005, empezó a ajustar la pensión inicial en función de la esperanza de vida en el año 2010, tomando el año 2009 como base. El factor de ajuste se obtiene como cociente de dos valores actuales actuariales de una renta vitalicia unitaria a los 62 años con un tipo de interés de valoración del 2%, en la que el numerador se calcula con datos medios de mortalidad de los años 2003-2007 y el denominador con datos medios de mortalidad del quinquenio que corresponda (2004-2008 para el coeficiente de 2010). Se prevé que este factor de ajuste tome el valor 0,95 en 2020 y 0,9 en 2040. (ii) En Portugal, la reforma de 2007 incorporó un coeficiente de sostenibilidad similar al de Finlandia, es decir, aplicable sobre la cuantía de la pensión inicial, aunque se obtiene como cociente directo de la esperanza de vida

Y ¿por qué es necesario un factor de sostenibilidad? En los próximos años, según un informe de la compañía aseguradora AXA (AXA, 2013), cada día que pase los españoles ganaremos 3,2 horas de esperanza de vida. El aumento de la longevidad y la contracción de la natalidad configuran una nueva estructura de pirámide poblacional. En realidad, una pirámide invertida, estrecha por abajo y ancha por arriba. Uno de los grandes retos del siglo XXI será convivir con esta situación, lo que se

---

media a los 65 años en el año base (2006) y en el año anterior al de la jubilación. El primer año de aplicación fue 2010.

2. Reformas que vinculan la revalorización de las pensiones a indicadores que combinan variables demográficas y/o económicas: (i) Alemania tiene un sistema de puntos mediante el cual el importe de la pensión de cada año (no sólo la inicial) depende del valor de cada punto. Aunque dicho valor depende del nivel salarial medio, desde el año 2005 se ajusta por un factor de cotización, que depende inversamente del tipo de cotización a la parte pública obligatoria y a la privada voluntaria, y por un factor de sostenibilidad que depende de la ratio *cotizantes-pensionistas*, que es función tanto de variables demográficas como económicas. A mayor ratio mayor revalorización del punto. Al afectar a todas las pensiones, y no sólo a la inicial, este mecanismo tiene efectos más potentes sobre el control del gasto en pensiones. (ii) Suecia, aunque dentro del sistema de cuentas nacionales, también tiene un mecanismo de equilibrio que ajusta automáticamente la revalorización de las pensiones a un indicador que combina variables demográficas y económicas: el balance actuarial del sistema o relación entre activo (fondo nacional existente más valor actual actuarial de las futuras cotizaciones) y pasivo (valor actual actuarial de las futuras pensiones). Si la ratio *activo/pasivo* (denominada ratio de solvencia) es menor que 1, se ajusta a la baja el rendimiento atribuido al fondo nacional y a la revalorización de las pensiones existentes. Por otro lado, en cuanto la ratio vuelva a ser mayor que 1 se recupera la senda de rendimiento, que está relacionada con el crecimiento promedio de los salarios. (iii) En Hungría, la revalorización de las pensiones depende del IPC y del crecimiento nominal de los salarios pero el peso de cada variable depende del crecimiento real del Producto Interior Bruto, de manera que si éste no supera el 3% la revalorización de las pensiones pasa a depender sólo del IPC.

traduce en que las pensiones y el envejecimiento poblacional serán *El Desafío*, con mayúsculas, de esa futura Unión Europea. Que los ciudadanos cuenten con unas pensiones de jubilación adecuadas y sostenibles debe ser una cuestión prioritaria. En este sentido, los informes de la Comisión Europea de 2009 y 2012 sobre el Envejecimiento y el Libro Blanco sobre las pensiones de 2012 evidencian que los sistemas de pensiones de los países miembros se enfrentan a un empeoramiento de la relación entre trabajadores y jubilados, y al mencionado envejecimiento poblacional. En este contexto, en España se han dado tres pasos importantes: el primero, en 2011, en el mandato del Gobierno socialista. Los otros dos, en 2012 y 2013, en el mandato del Gobierno popular.

El primer paso firme se llevó a cabo en el mandato del Ejecutivo de José Luis Rodríguez Zapatero en agosto de 2011. La Ley 27/2011 comenzó a hacer frente a los citados retos. Se señalaban entonces los importantes desafíos que debía afrontar la Seguridad Social si quería garantizar su propia sostenibilidad financiera. Y se destacaba el hecho de que España era el segundo país del mundo con mayor longevidad. Las medidas de esta primera reforma se podrían resumir en tres: (i) ampliación del periodo de cómputo de 15 a 25 años para el cálculo de la base reguladora; (ii) retraso de la edad ordinaria de jubilación de 65 a 67 años, aplicándose coeficientes reductores en caso de jubilación anticipada; y (iii) ampliación de la escala de 35 a 37 años cotizados para recibir el 100% de la pensión (junto a una bajada progresiva de dicha escala hasta convertirse en totalmente proporcional). La reforma en el mandato socialista estableció una cuarta medida de gran importancia más: el factor de sostenibilidad, recogido, como se ha citado, en el artículo 8 de la Ley 27/2011.

El segundo paso fue el que se dio en el mandato del Gobierno de Mariano Rajoy en 2012. Se consideró oportuno que, en un contexto de profunda crisis, ese factor de sostenibilidad, cuya aplicabilidad estaba



prevista para 2027, se adelantara en caso de proyectarse un déficit en el largo plazo del sistema de pensiones. Sin embargo, dejaba sin concretar en qué consistía ese factor de sostenibilidad. El tercer paso lo dieron los populares el pasado 16 de marzo de 2013 al modificar, mediante Real Decreto-ley, las jubilaciones anticipadas. En este caso se retrasa la edad de acceso a la jubilación anticipada a los 63 años y se requieren 33 años cotizados, en concordancia con los 67 años y 37 de cotización de la reforma socialista del 2011 exigidos para cobrar el 100% de la pensión.

El endurecimiento del acceso a la jubilación anticipada va en línea con las recomendaciones de la Unión Europea, la sostenibilidad de los sistemas de pensiones y el impulso del envejecimiento activo. De hecho, estas medidas permiten satisfacer las Recomendaciones del Consejo de la Unión Europea de 10 de julio de 2012. La reforma sigue las recomendaciones del último informe del Pacto de Toledo, que incluía referencias expresas a la necesidad de conceder una mayor relevancia a la carrera de cotización del trabajador para favorecer la aproximación de la edad real de jubilación a la edad legal de acceso a la jubilación. Del mismo modo, el informe advertía de la importancia de que la jubilación anticipada se reservara a aquellos trabajadores que contaran con largas carreras de cotización para, finalmente, facilitar la coexistencia de salario y pensión. Además, la reforma del Ejecutivo establece la medida más importante: la creación de un comité de expertos para el estudio del factor de sostenibilidad del sistema de la Seguridad Social, responsables de elaborar un informe para su posterior remisión a la Comisión del Pacto de Toledo. El Consejo de Ministros redactó el 12 de abril el acuerdo por el que se constituye el citado comité, compuesto por doce expertos, quienes deberán ser fieles a la ley y definir un factor de sostenibilidad del sistema de seguridad social conforme indica la norma, es decir, un factor cuyo objetivo sea mantener la proporcionalidad entre las contribuciones al sistema y las prestaciones esperadas del mismo con garantía de sostenibilidad y que, a

su vez, tenga en cuenta la diferencia de la esperanza de vida a los 67 años en la actualidad y en el año en que se efectúe la revisión (utilizando a este fin las previsiones realizadas por los organismos oficiales competentes).

### **3. Dos modelos de sostenibilidad de las pensiones de jubilación de prestación definida**

Los dos modelos se basan en seis parámetros: el primer parámetro, la esperanza de vida; el segundo, la natalidad; el tercero, los movimientos migratorios; el cuarto, la tasa de paro; el quinto, la productividad y el sexto y último, la inflación. El modelo comienza con un primer enfoque (primer modelo) que simplifica la realidad y evoluciona hacia una segunda aproximación más compleja (segundo modelo).

En el primer modelo se analiza aisladamente el efecto de la evolución de la esperanza de vida, observándose que sólo el envejecimiento de la población tiene una trascendencia elevada en las pensiones, constatándose que el envejecimiento de la población será uno de los retos más importantes a los que se enfrenta Europa, en general, y España en particular. Para poder observar aisladamente el efecto de la esperanza de vida en el sistema de reparto se define que existe pleno empleo; que la productividad, a precios constantes, es constante, es decir, no hay aumentos de productividad en la población. Asimismo, es necesario establecer una hipótesis de población teórica que sólo tiene entradas por nacimiento<sup>9</sup>.

---

<sup>9</sup> Esta población teórica, una vez definida la misma, no permite entradas por movimientos migratorios, pero sí permite entradas de los nacimientos, sus salidas sólo son debidas a aspectos derivados de las leyes biométricas y se realiza la hipótesis de que las invalideces son cero.

En el segundo modelo se introduce la realidad de evolución y proyección de la población en España para un periodo descrito (1975-2048), es decir, la realidad y proyección de la tasa de natalidad, de la esperanza de vida, así como de los movimientos migratorios, aplicando sensibilidades a los parámetros de tipos de interés, inflación, tasa de paro y productividad<sup>10</sup>.

### 3.1. Primer modelo

Si la población es estacionaria y piramidal -de base amplia en las edades tempranas y cúspide estrecha en las edades avanzadas-, en un escenario de pleno empleo, donde la base de la cotización se incrementase a la inflación, se demuestra que si el sistema financiero de capitalización individual otorga un rendimiento -tipo de interés- igual a la inflación, entonces da idéntico resultado al reparto puro, es decir, la pensión a percibir por los jubilados es igual en ambos sistemas y, por tanto, es independiente del sistema de financiación utilizado. Las hipótesis del modelo son las siguientes:

- La población tiene entradas por nacimiento, es estacionaria y piramidal -de base amplia y cúspide estrecha-.
- Existe pleno empleo.
- Todos los trabajadores cotizan lo mismo durante la totalidad de la vida laboral y dicha cotización se incrementa anualmente a la inflación.
- Para el cálculo de la pensión se observa la totalidad de las cotizaciones realizadas durante toda la vida laboral del trabajador, desde que entra a trabajar a la edad  $x$ , jubilándose en ambos sistemas a la edad  $(x+n)$ .

---

<sup>10</sup> Se hallan los parámetros de productividad -en el sistema de reparto-, y de tipo de interés -en el sistema de capitalización individual- para que exista equivalencia entre ambos sistemas financieros, dada la población española y una determinada tasa de paro.

- En el sistema de reparto la productividad, a precios constantes, es constante, es decir, no hay aumentos de productividad en la población.

### 3.1.1. Resultados del primer modelo

Una vez proyectado el sistema de reparto puro un número suficientemente amplio de años bajo las anteriores hipótesis, los resultados son que la pensión a percibir en el momento de la jubilación por parte de los trabajadores, en valor actual, y revalorizable anualmente a la inflación, es la siguiente:

$$\theta \cdot w_{x+r-1} = t_n \cdot w_0 \cdot \frac{1 + e_x^a}{{}_r p_x \cdot (1 + e_{x+r})}$$

donde:

x	Edad a la que se comienza a cotizar
x+r	Edad de jubilación
$\theta \cdot w_{x+r-1}$	Valor actual de la pensión, revalorizable a la inflación c desde el momento de la jubilación, expresada como un porcentaje $\theta$ del último salario $w_{x+r-1}$
$t_n \cdot w_0$	Valor actual del importe de la cotización anual, revalorizable a la inflación, expresada por la tasa de cotización $t_n$ , multiplicado por el salario en valor actual $w_0$
${}_r p_x$	Probabilidad que un trabajador de edad x alcance la edad de jubilación
$e_{x+r}$	Esperanza de vida a la edad de jubilación
$e_x^a$	Años de cotización esperados a la edad x

Esta primera formulación permite estudiar de manera aislada el efecto de la evolución de la esperanza de vida, tal como hemos comentado, lo que permite calibrar la trascendencia que tiene el envejecimiento de la población por un aumento de esta variable.

### 3.1.2. Formulación del primer modelo

Se parte del principio de equivalencia colectivo o ecuación de Kaan<sup>11</sup>. Como ya se ha citado, el modelo financiero de los sistemas públicos

---

<sup>11</sup> Los sistemas financiero-actuariales de financiación de las pensiones tratan de establecer un equilibrio entre los valores de las aportaciones y los valores de las prestaciones. Si estos valores son iguales, entonces el sistema se encuentra en equilibrio. En el ámbito de los sistemas de previsión social contributivos todo sistema financiero-actuarial de financiación debe buscar su equilibrio, intentando cumplir el denominado principio de equivalencia colectivo (ecuación de Kaan), el cual se fundamenta en tres elementos: 1) El primer elemento es el colectivo, que está formado por el conjunto de personas objeto de protección social (en el ámbito contributivo, el colectivo son los trabajadores en activo que están adquiriendo o aumentando el derecho a pensión, junto con los que se encuentran ya en pasivo y que lo están cobrando). Cada colectivo tendrá una determinada estructura demográfica y estará sometido a los fenómenos aleatorios propios de la vida así como a la situación económica, en definitiva, sometido a fenómenos biométricos (supervivencia y fallecimiento, entre otros), y económicos (inflación, crecimiento económico, factores de equivalencia monetarios, entre otros). 2) El segundo elemento es la equidad, entendida como la ecuanimidad que debe existir entre los derechos y las aportaciones. El principio de equidad obliga a guardar una proporcionalidad entre las cotizaciones y las prestaciones. Si no existe esa proporcionalidad, entonces nos encontramos ante sistemas de redistribución de rentas, dedicándose a paliar situaciones de desamparo. 3) El tercer elemento es la solidaridad, que es una solidaridad impuesta, la cual debe afectar a todo el colectivo. En prestación definida existe solidaridad, tanto en el sistema financiero de reparto como en el de capitalización individual. Se trata de una solidaridad basada en el

de pensiones se estructura, habitualmente, en torno al modelo de reparto puro. Es conocido que el sistema de reparto puro consiste, sucintamente, en que las pensiones en curso se financian con las aportaciones en curso; así, las pensiones actuales que reciben las personas jubiladas se pagan mediante las cuotas que se giran a los trabajadores en activo. Se considera como colectivo a la totalidad de los jubilados mas la totalidad de los trabajadores en activo y, entonces, se puede afirmar que el modelo de reparto puro consiste en repartir año por año todas las cargas o prestaciones que produce el colectivo entre los miembros cotizantes del mismo; es decir, consiste en establecer un equilibrio financiero anual entre aportaciones y prestaciones. Siguiendo la nomenclatura usada en el presente estudio, los detalles del desarrollo de la demostración y de las hipótesis son los siguientes:

a) Estructura demográfica estable

A continuación se plasman los elementos que configuran lo que denominamos estructura demográfica estable: homogeneidad biométrica, independencia, estacionariedad<sup>12</sup> y pirámide poblacional sostenible. Así, el modelo biométrico que se plantea se somete a lo siguiente:

a1) Homogeneidad biométrica: para cualquier fenómeno aleatorio asociado a la vida, los individuos componentes del grupo son equivalentes entre sí; es decir, la función de distribución de probabilidad de la variante

---

principio mutua que tienen los cálculos actuariales en prestación definida tanto en reparto como en capitalización, dado que cuando en capitalización fallece un trabajador (prestación definida, diferido puro), ese fallecimiento alimenta la fuerza de capitalización actuarial para el resto de trabajadores, no sólo de su generación (intrageneracional) sino de cualquier generación (intergeneracional).

<sup>12</sup> Esta primera hipótesis es la que la ciencia actuarial denomina 'Postulados Fundamentales' y es en la que se apoya la teoría de la supervivencia.

*edad de muerte, edad de invalidez, etcétera*, es igual para todos los individuos del grupo<sup>13</sup>.

- a2) Independencia: las variables aleatorias que están asociadas a cada individuo del grupo son estocásticamente independientes entre sí.
- a3) Estacionariedad: las variables aleatorias biométricas dependen exclusivamente del tiempo biométrico o edad, sin influencia en ellas del tiempo físico.
- a4) Pirámide poblacional constantemente sostenible: definimos que una pirámide poblacional es constantemente sostenible si el número de nacidos permanece constante en el tiempo.

b) Estructura económica estable

A continuación se enumeran los elementos que constituyen lo que denominamos estructura económica estable: estabilidad salarial, estabilidad en el empleo y estabilidad en los precios. Los salarios y los precios crecen con la inflación.

3.1.3. Sistema contributivo y de prestación definida

Se trata de un sistema contributivo en el que siempre una parte  $w_0$  del salario entra a formar parte de la base de cotización. Asimismo, se trata de un sistema de prestación definida, es decir, siempre queda definido el importe de la pensión. Además, se verifica que  $w_0 < w_{x+i}$ ,  $\forall i$ , siendo  $w_{x+i}$  el salario a la edad  $x+i$ . La cotización es el resultado de multiplicar el tipo fijo  $t_n$  por la base de cotización. Se establece que la edad de entrada

---

<sup>13</sup> La homogeneidad biométrica es una hipótesis que refuerza el principio de solidaridad, ya que las personas que fallecen prematuramente financian a los que continúan con vida.

$x_0$  es la edad de inicio laboral y, en consecuencia, la edad a la que se comienza a cotizar; y que la edad  $x_r$  es la edad de jubilación, es decir, la que da derecho a percibir una pensión anual de jubilación cuyo importe será un porcentaje del último salario anual  $\theta \cdot w_{x+r-1}$ , ( $0 < \theta < 1$ ).

#### 3.1.4. Definición del colectivo protegido por el sistema

Son miembros del colectivo todos los trabajadores y jubilados de una nación. Se excluyen los movimientos migratorios, tanto los de entrada como los de salida. Se contemplan como entradas al colectivo la incorporación de jóvenes al mercado laboral a su edad establecida como edad de entrada<sup>14</sup> y, a partir de ahí, el colectivo tiene como única fuente de variación las salidas que del mismo se produzcan por fallecimiento.

#### 3.1.5. Configuración de la estructura demográfica y salarial estable

Se configura la estructura demográfica y económica. La estructura demográfica y salarial de los trabajadores es la siguiente:

Edad	Número de personas activas	Base cotización
$x_0 = x$	$l_{x_0} = l_x$	$w_0 = \alpha_0 \cdot w_x$
$x_1 = x + 1$	$l_{x_1} = l_{x+1}$	$w_0 = \alpha_0 \cdot w_{x+1}$
....	....	....
$x_{r-1} = x + (r - 1)$	$l_{x_{r-1}} = l_{x+(r-1)}$	$w_0 = \alpha_{r-1} \cdot w_{x+(r-1)}$

<sup>14</sup> Por tanto, no es un colectivo cerrado que se extinguiría al cabo de unos ciertos años, sino que es un colectivo abierto, cuya entrada al mismo está limitada a la incorporación de jóvenes que comienzan a trabajar.



La estructura demográfica y de pensión de los jubilados es la siguiente:

Edad	Número de personas jubiladas	Pensión
$x_r = x + r$	$l_{x_r} = l_{x+r}$	$\theta \cdot w_{x+(r-1)}$
$x_{r+1} = x + r + 1$	$l_{x_{r+1}} = l_{x+r+1}$	$\theta \cdot w_{x+(r-1)}$
....	....	....
$x_w = w$	$l_{x_w} = l_w = 0$	$\theta \cdot w_{x+(r-1)}$

### 3.1.6. Cálculo de la pensión de jubilación en el sistema de reparto y su transformación a los efectos del primer modelo

Como ya se ha visto, aplicando el principio de equivalencia colectivo (ecuación de Kaan), dado que en este sistema financiero todas las cargas o prestaciones que se producen en el colectivo se reparten entre los miembros cotizantes de dicho colectivo, siguiendo a Nieto de Alba, U. y J. Vegas Asensio (1993) se establece que el modelo actuarial de reparto estará en equilibrio si cumple la siguiente ecuación:

$$t_0 \cdot w_0 \cdot (l_x + l_{x+1} + \dots + l_{x+r-1}) = \theta \cdot w_{x+(r-1)} \cdot (l_{x+r} + l_{x+r+1} + \dots + l_w)$$

donde:

$$\begin{aligned} \text{Aportaciones} & \quad P = t_0 \cdot w_0 \cdot (l_x + l_{x+1} + \dots + l_{x+r-1}) \\ \text{Prestaciones} & \quad K = \theta \cdot w_{x+(r-1)} \cdot (l_{x+r} + l_{x+r+1} + \dots + l_w) \end{aligned}$$

operando:

$$\theta \cdot w_{x+(r-1)} = t_0 \cdot w_0 \cdot \frac{(l_x + l_{x+1} + \dots + l_{x+r-1})}{(l_{x+r} + l_{x+r+1} + \dots + l_w)}$$

Es decir, la pensión de jubilación de cuantía  $\theta \cdot w_{x+r-1}$  está en relación directa con la cotización realizada por los activos, multiplicada por un coeficiente que es el cociente entre el número total de activos y el número total de pasivos. Si se realiza una proyección del sistema de reparto para conocer cuál sería la pensión de jubilación de una persona de edad  $x$  que acaba de entrar en el sistema, siguiendo el modelo de proyección de Nieto de Alba, U. y J. Vegas Asensio (*op. cit.*), los resultados son los siguientes -el importe de los salarios y las pensiones crece a la inflación-.

El cálculo de la pensión de jubilación esperada el próximo año dependerá también de los activos esperados dentro de un año y de los pasivos esperados en ese mismo período de tiempo. Los activos esperados y base de cotización esperada dentro de un año serán:

Edad	Nº esperado de personas activas	Base cotización esperada
$x_0 = x$	$l_{x_0} = l_x$	$w_0 \cdot (1+c) = \alpha_0 \cdot w_x \cdot (1+c)$
$x_1 = x+1$	$l_{x_1} = l_x \cdot p_x = l_{x+1}$	$w_0 \cdot (1+c) = \alpha_1 \cdot w_{x+1} \cdot (1+c)$
....	....	.....
$x_{r-1} = x+(r-1)$	$l_{x+r-1} = l_{x+r-2} \cdot p_{x+r-2}$	$w_0 \cdot (1+c) = \alpha_{r-1} \cdot w_{x+r-1} \cdot (1+c)$

Los pasivos y las pensiones esperadas dentro de un año serán:

Edad	Nº esperado de personas jubiladas	Pensión esperada
$x_r = x+r$	$l_{x_r} = l_{x+r-1} \cdot p_{x+r-1} = l_{x+r}$	$\theta \cdot w_{x+r-1} \cdot (1+c)$
$x_{r+1} = x+r+1$	$l_{x_{r+1}} = l_{x+r} \cdot p_{x+r} = l_{x+r+1}$	$\theta \cdot w_{x+r-1} \cdot (1+c)$
....	....	....
$x_w = w$	$l_{x_w} = l_{w-1} \cdot p_{w-1} = l_w = 0$	$\theta \cdot w_{x+r-1} \cdot (1+c)$

De todo ello se desprende que el valor de las aportaciones esperadas dentro de un año, ( $AP1$ ), será el siguiente:

$$AP1 = t_1 \cdot w_0 \cdot (1+c) \cdot (l_x + l_x \cdot p_x + l_{x+1} \cdot p_{x+1} + \dots + l_{x+r-2} \cdot p_{x+r-2})$$

y el de las prestaciones esperadas dentro de un año, ( $PE1$ ):

$$PE1 = \theta \cdot w_{x+(r-1)} \cdot (1+c) \cdot (l_{x+r-1} \cdot p_{x+r-1} + l_{x+r} \cdot p_{x+r} + \dots + l_{w-1} \cdot p_{w-1})$$

Aplicando el principio de equivalencia colectivo, el equilibrio al cabo de un año se obtiene cuando  $AP1=PE1$ . Por tanto, la pensión de jubilación que hace que el sistema financiero actuarial se encuentre el equilibrio dentro de un año será:

$$\theta \cdot w_{x+r-1} \cdot (1+c) = t_1 \cdot w_0 \cdot (1+c) \cdot \frac{(l_x + l_x \cdot p_x + l_{x+1} \cdot p_{x+1} + \dots + l_{x+r-2} \cdot p_{x+r-2})}{(l_{x+r-1} \cdot p_{x+r-1} + l_{x+r} \cdot p_{x+r} + \dots + l_{w-1} \cdot p_{w-1})}$$

Es decir, la pensión de jubilación (actualizada por la inflación) de cuantía  $\theta \cdot w_{x+(r-1)} \cdot (1+c)$  está en relación directa con la cotización esperada (actualizada por la inflación) que realizarán los activos, multiplicada por un coeficiente que se obtiene al dividir el número total de activos esperados dentro de un año entre el número total de pasivos esperados dentro de un año.

Generalizando el proceso anterior, la pensión de jubilación esperada dentro de  $n$  años, siendo  $n = w - x$ , dependerá de los activos y pasivos esperados conforme a lo siguiente. Los activos esperados y base de cotización esperada dentro de  $n$  años serán:

Edad	Nº esperado de personas activas	Base cotización esperada
$x_0 = x$	$l_{x_0} = l_x$	$w_0 \cdot (1+c)^n = \alpha_0 \cdot w_x \cdot (1+c)^n$
$x_1 = x+1$	$l_{x_1} = l_x \cdot p_x = l_{x+1}$	$w_0 \cdot (1+c)^n = \alpha_1 \cdot w_{x+1} \cdot (1+c)^n$
....	....	....
$x_{r-1} = x+(r-1)$	$l_{x+r-1} = l_x \cdot {}_{r-1}p_x$	$w_0 \cdot (1+c)^n = \alpha_{r-1} \cdot w_{x+r-1} \cdot (1+c)^n$

los pasivos y las pensiones esperadas dentro de  $n$  años serán:

Edad	Nº esperado de personas jubiladas	Pensión esperada
$x_r = x+r$	$l_{x_r} = l_x \cdot {}_r p_x = l_{x+r}$	$\theta \cdot w_{x+r-1} \cdot (1+c)^n$
$x_{r+1} = x+r+1$	$l_{x_{r+1}} = l_x \cdot {}_{r+1} p_x = l_{x+r+1}$	$\theta \cdot w_{x+r-1} \cdot (1+c)^n$
....	....	....
$x_w = w$	$l_{x_w} = l_x \cdot {}_{w-x} p_x = l_w = 0$	$\theta \cdot w_{x+r-1} \cdot (1+c)^n$

por lo que las aportaciones esperadas ( $AP_n$ ) serán:

$$AP_n = t_n \cdot w_0 \cdot (1+c)^n \cdot (l_x + l_x \cdot p_x + l_x \cdot {}_2 p_x + \dots + l_x \cdot {}_{r-1} p_x)$$

y las prestaciones esperadas ( $PE_n$ ):

$$PE_n = \theta \cdot w_{x+(r-1)} \cdot (1+c)^n \cdot (l_x \cdot {}_r p_x + l_x \cdot {}_{r+1} p_x + l_x \cdot {}_{r+2} p_x + \dots + l_x \cdot {}_{w-x} p_x)$$

Aplicando el principio de equivalencia colectivo, el equilibrio al cabo de  $n$  años se obtiene cuando  $AP_n = PE_n$ . Por tanto, la pensión de jubilación que hace que el sistema financiero actuarial se encuentre el equilibrio dentro de  $n$  años será:

$$\theta \cdot w_{x+(r-1)} \cdot (1+c)^n = t_n \cdot w_0 \cdot (1+c)^n \cdot \frac{(l_x + l_x \cdot p_x + l_x \cdot 2p_x + \dots + l_x \cdot r-1 p_x)}{(l_x \cdot p_x + l_x \cdot r+1 p_x + \dots + l_x \cdot w-x p_x)}$$

Operando, que en definitiva, es idéntico a establecer el equilibrio o principio de equivalencia colectivo en el origen o momento cero, mediante la actualización financiera de ambos términos de la ecuación a una tasa de actualización financiera  $i = c$ , y por tanto, aplicando la ecuación de Kaan en el origen, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\theta \cdot w_{x+r-1} = t_n \cdot w_0 \cdot \frac{(1 + p_x + 2p_x + 3p_x + 4p_x + 5p_x + \dots + r-1 p_x)}{(r p_x + r+1 p_x + r+2 p_x + r+3 p_x + \dots + w-x p_x)}$$

Se transforman los valores relacionándolos con el número de cabezas vivas a la edad  $x + r$ :

$$\theta \cdot w_{x+r-1} = t_n \cdot w_0 \frac{(1 + p_x + 2p_x + 3p_x + \dots + r-1 p_x)}{r p_x (1 + p_{x+r} + 2p_{x+r} + 3p_{x+r} + \dots + w-x-r p_{x+r})}$$

como  $l_{x+r} = r p_x \cdot l_x$ , entonces:

$$\theta \cdot w_{x+r-1} = t_n \cdot w_0 \frac{l_x \cdot (1 + p_x + 2p_x + 3p_x + \dots + r-1 p_x)}{l_{x+r} \cdot (1 + p_{x+r} + 2p_{x+r} + 3p_{x+r} + \dots + w-x-r p_{x+r})}$$

asimismo, definiendo la esperanza de vida a la edad  $x + r$  como:

$$e_x = p_{x+r} + 2p_{x+r} + \dots + n-1 p_{x+k}$$

y definiendo los años de cotización esperados a la edad  $x$  como:

$$e_x^a = p_x + 2p_x + 3p_x + \dots + r-1 p_x$$

entonces, obtenemos la siguiente expresión:

$$\theta \cdot w_{x+r-1} = t_n \cdot w_0 \cdot \frac{1 + e_x^a}{{}_r p_x \cdot (1 + e_{x+r})}$$

De lo anterior se puede concluir que, bajo las hipótesis establecidas, en un sistema financiero gestionado por la técnica del reparto puro en el que la estructura demográfica permanece estable y donde se preserva el poder adquisitivo (actualizando tanto las pensiones como las aportaciones a la inflación), para un trabajador que aporta desde que comienza a trabajar hasta la jubilación unas cotizaciones que se revalorizan según la citada la inflación, entonces el valor actualizado (en el origen) de la pensión vitalicia (revalorizada y revalorizable también a la inflación) que se percibirá a partir de la edad de jubilación es igual al valor actualizado de la aportación (aportación inicial:  $t_n \cdot w_0$ ), multiplicado por una relación biométrica establecida por el cociente entre los años esperados de cotización más uno ( $1 + e_x^a$ ) y la esperanza de vida a la edad de jubilación más uno ( $1 + e_{x+r}$ ) multiplicada por la probabilidad de alcanzar con vida la edad de jubilación ( ${}_r P_x$ ).

### 3.1.7. Influencia en la equivalencia de los aspectos relativos a la estabilidad económica

Se ha definido como hipótesis la de estabilidad económica, que consiste en una estabilidad en los salarios, en los precios y en el empleo, estableciéndose que estas variables evolucionan en relación a la inflación. Se acaba de obtener que el valor actual de la pensión de jubilación esperada vendrá determinado, tanto en el sistema de reparto como en el de capitalización individual, por la siguiente expresión:

$$\theta \cdot w_{x+r-1} = t_n \cdot w_0 \cdot \frac{1 + e_x^a}{{}_r p_x \cdot (1 + e_{x+r})}$$

despejando de la anterior ecuación el tipo de cotización, se obtiene:

$$t_n = \frac{\theta \cdot w_{x+r-1} \cdot {}_r p_x (1 + e_{x+r})}{w_0 (1 + e_x^a)} = \frac{\theta \cdot w_{x+r-1}}{w_0} \cdot \frac{{}_r p_x (1 + e_{x+r})}{(1 + e_x^a)}$$

Como se ha comentado, la pensión de jubilación no es constante, sino que varía a una tasa de actualización anual  $\alpha$  igual un índice de actualización, de tal manera que la cuantía  $\theta \cdot w_{x+(r-1)} \cdot (1 + \alpha)$  es la pensión de jubilación correspondiente al año siguiente y entonces el tipo de cotización de dicha anualidad tendrá que ser:

$$t_{n+1} = \frac{\theta \cdot w_{x+r-1} \cdot (1 + \alpha) \cdot {}_r p_x (1 + e_{x+r})}{w_0 (1 + e_x^a)} = \frac{\theta \cdot (1 + \alpha) w_{x+r-1}}{w_0} \cdot \frac{{}_r p_x (1 + e_{x+r})}{(1 + e_x^a)} = t_n \cdot (1 + \alpha)$$

Es decir, que el tipo de cotización de dicha anualidad aumenta también al citado índice. Si se considera que, a la vez, como se ha indicado, existe un incremento promedio de los salarios de los trabajadores que repercute directamente en la base de cotización de tal manera que el salario y, por consiguiente, la base de cotización, varía a una tasa anual  $\beta$ , entonces el tipo de cotización de dicha anualidad tendrá que ser:

$$t_{n+1} = \frac{\theta \cdot w_{x+r-1} \cdot (1 + \alpha) \cdot {}_r p_x (1 + e_{x+r})}{w_0 \cdot (1 + \beta) \cdot (1 + e_x^a)} = \frac{\theta \cdot (1 + \alpha) w_{x+r-1}}{w_0 \cdot (1 + \beta)} \cdot \frac{{}_r p_x (1 + e_{x+r})}{(1 + e_x^a)} = t_n \cdot \frac{(1 + \alpha)}{(1 + \beta)}$$

De lo anterior se concluye que si se incrementan los salarios y las pensiones, año tras año y durante  $r$  años, a una tasa anual  $\alpha = \beta = c$ , y que dicha tasa  $c$  puede ser el propio índice de precios al consumo o la productividad, entonces el tipo de cotización de la anualidad o de cualquier anualidad posterior será siempre igual:

$$t_n = t_{n+1} = t_{n+2} = \dots = t_{n+r-1} = t_{n+r}$$

Lo que sí hay que tener en cuenta es que la pensión de jubilación varía con el citado tipo de actualización, y dentro de  $r$  años dicha pensión será:

$$\theta \cdot w_{x+r-1}^* = \theta \cdot w_{x+r-1} \cdot (1 + \alpha)^{x_r - x_0}$$

Por tanto  $\theta \cdot w_{x+r-1}$  es el importe anual deflactado de la renta vitalicia a cobrar en la jubilación<sup>15</sup>, siendo su importe a cobrar transcurridos  $r$  años el siguiente:

$$\theta \cdot w_{x+r-1}^* = \theta \cdot w_{x+r-1} \cdot (1 + \alpha)^{x_r - x_0}$$

A su vez, las aportaciones varían también a la inflación y, por tanto,  $t \cdot w_0$  es el importe anual deflactado<sup>16</sup> a aportar al inicio. De lo anterior, se

---

<sup>15</sup> A su vez, cada año recibirá una pensión más elevada con respecto a la cuantía del año anterior para hacer frente a la inflación, de valor anual en tanto por uno  $c$ .

<sup>16</sup> Sobre las cotizaciones de los trabajadores en activo se debe tener en cuenta que éstas crecerán según pasen los años. Se establece como hipótesis de su crecimiento la tasa de inflación. A su vez, en la pensión que se pagará se reflejará el incremento de valor que se manifiesta por el mismo efecto inflacionista. Por consiguiente, tanto la hipótesis salarial como la hipótesis de prestación de jubilación se ven afectadas por efecto de la inflación.



puede concluir que ante una variación a la vez de los salarios y de las pensiones al índice de precios al consumo o a la productividad, el tipo de cotización no varía, si bien, tanto la pensión como la aportación se incrementan a dichos índices. En definitiva, las pensiones deben ser actualizadas al índice que incrementen los salarios. Si los salarios se incrementan a la inflación, entonces las pensiones pueden actualizarse a la inflación; si los salarios se incrementan a la productividad, entonces las pensiones pueden actualizarse a la productividad.

Al igual que se ha aceptado que la única salida del colectivo es por causa de muerte, se puede generalizar a que la causa de salida sea otra causa biométrica adicional (como puede ser, salidas del colectivo tanto por fallecimiento como por invalidez).

### 3.1.8. Influencia en la equivalencia de los aspectos relativos a la estabilidad demográfica y a la esperanza de vida. Factor de sostenibilidad.

Si se produce un aumento paulatino de la esperanza de vida de los jubilados la cuota será cada vez mayor que la del año anterior, de tal forma que al cabo de  $n$  años, si  $e_{x+r} \rightarrow \infty$ , entonces  $t_n \rightarrow \infty$ . De la misma forma, si la cuota permanece constante y si se produce el citado aumento paulatino de la esperanza de vida de los jubilados, la pensión será cada vez menor que la del año anterior. Por tanto, si la esperanza de vida a la jubilación aumenta ¿cuál debe ser la nueva pensión para que quede nuevamente equilibrado el sistema sin aumento de cuota? Partimos de la siguiente fórmula:

$$\theta \cdot w_{x+r-1} = t_n w_0 \frac{1 + e_x^a}{r p_x (1 + e_{x+r})}$$

despejamos la cuota:

$${}_t w_0 = \frac{\theta \cdot w_{x+r-1} \cdot ({}_r p_x \cdot (1 + e_{x+r}))}{(1 + e_x^a)}$$

Si se establece  $P1 = \theta \cdot w_{x+r-1}$  como la pensión de jubilación en el momento  $t$ , y denominamos  $P2$  a la nueva pensión de jubilación en el momento  $t+5$  y se establece  $ev1 = e_{x+r}$  como la esperanza de vida a la edad de jubilación en el momento  $t$ , y se denomina  $ev2$  a la nueva esperanza de vida a la jubilación en el momento  $t+5$ , y se decide dejar todos los demás valores constantes, entonces, si se igualan ambas ecuaciones, se obtiene la nueva pensión de jubilación  $P2$  en el momento  $t+5$ , mediante la siguiente expresión:

$$P2 = P1 \cdot (1 + ev1) / (1 + ev2)$$

En conclusión, la nueva pensión de jubilación se obtiene multiplicando a la pensión de jubilación previa a la subida de la esperanza de vida, por el cociente que forman uno más la antigua esperanza de vida dividido por uno más la nueva esperanza de vida.

Se propone esta fórmula actuarial como una forma del factor de sostenibilidad de tal manera que, como marca la ley, cada cinco años se observen en la edad de jubilación las esperanzas de vida en  $t$  y en  $t+5$ , y la nueva pensión de jubilación en  $t+5$  se obtenga multiplicando la pensión de jubilación en  $t$  por el cociente que forman uno más la antigua esperanza de vida en  $t$  [ $ev1$ ] dividido por uno más la nueva esperanza de vida en  $t+5$  [ $ev2$ ]. En términos prácticos, si transcurrido el periodo de observación de cinco años, la esperanza de vida a la edad de jubilación aumenta un año,

pasando de 19 años a 20 años, entonces, para que el sistema siga siendo sostenible, la pensión de jubilación se debería ver mermada en un 4,76%<sup>17</sup>.

### 3.1.9. Cálculo de la pensión de jubilación en el sistema de capitalización individual de prestación definida y su transformación a los efectos del primer modelo

En un sistema de capitalización individual de prestación definida queda establecida la cuantía de la pensión y la incógnita a hallar es la aportación que se debe realizar al sistema para que el mismo se encuentre en equilibrio. Es conocido que una pensión se abona mientras una persona está con vida, extinguiéndose la pensión a su fallecimiento. Por ello, para el cálculo de la aportación necesaria para alcanzar la citada pensión aplicando el sistema de capitalización individual es preceptivo aplicar, de acuerdo con López Cachero, M. y J. López de la Manzanara (1996) [tablas de supervivencia]. Estas tablas modelizan dicho fenómeno y permiten dar cuenta de la longevidad que experimentará una población. Conforme a la configuración de la estructura demográfica y económica y a las hipótesis utilizadas en la introducción, se ha definido que la edad  $x_0$  es la edad de inicio laboral y, en consecuencia, la edad a la que se comienza a cotizar; y que la edad  $x_r$  es la edad de jubilación, es decir, la que da derecho a percibir una pensión anual de jubilación. Asimismo, se ha establecido que:

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Factor de actualización al rédito anual de capitalización efectivo  $i$

$r$  Período de cotización, es decir, desde la edad  $x_0$  hasta la edad  $x_r$

---

<sup>17</sup> A no ser que algún otro elemento compense esa merma del 4,76%, como puede ser una mejora en la natalidad, en la migración, en el desempleo o en la productividad de los trabajadores en activo.

$c$	Es la inflación, valor anual en tanto por uno
${}_n P_{x_0}$	Probabilidad de que una persona de edad $x_0$ viva $n$ años más
$t_n \cdot w_0$	Importe anual a aportar <sup>18</sup> .
$\theta \cdot w_{x+r-1}$	Importe anual que actualmente se abona como renta vitalicia de los actuales jubilados <sup>19</sup> (por lo que su importe a cobrar en la jubilación transcurridos $r$ años será $\theta \cdot w_{x+r-1}^* = \theta \cdot w_{x+r-1} \cdot (1+c)^{x_r-x_0}$ ).

Son varios los autores que definen las ecuaciones de capitalización individual en un sistema de previsión social, como son, entre otros, Nieto de Alba, U. y J. Vegas Asensio (*op. cit.*), siendo los más recientes González Rabanal *et al.* (2008). Así, siguiendo a estos últimos, se establece que el modelo actuarial de capitalización individual estará en equilibrio si cumple la siguiente ecuación:

El primer componente de la ecuación,  $P$ , representa el valor actual actuarial de las aportaciones que debe realizar cada uno de los individuos del colectivo de edad  $x$  durante su situación de actividad hasta el momento de su jubilación a la edad  $x_r$ :

---

<sup>18</sup> Sobre las cotizaciones de los trabajadores en activo se debe tener en cuenta que éstas crecerán según pasen los años. Se establece como hipótesis de su crecimiento la tasa de inflación. A su vez, en la pensión que se pagará se reflejará el incremento de valor que se manifiesta por el mismo efecto inflacionista. Por consiguiente, tanto la hipótesis salarial como la hipótesis de prestación de jubilación se ven afectadas por efecto de la inflación.

<sup>19</sup> A su vez, una vez jubilado, cada año recibirá una pensión más elevada con respecto a la cuantía del año anterior para hacer frente a la inflación, cuyo valor anual en tanto por uno es  $c$ .

$$P = (t_n \cdot w_0) \cdot l_x \cdot \left[ 1 + (1+c)^1 \left( \frac{1}{1+i} \right)^1 \cdot {}_1p_{x_0} + \dots + (1+c)^{x_r-x_0-1} \left( \frac{1}{1+i} \right)^{x_r-x_0-1} \cdot {}_{x_r-x_0-1}p_{x_0} \right]$$

El segundo componente de la ecuación,  $K$ , representa el valor actual actuarial de las prestaciones que recibirá cada uno de los individuos del colectivo de trabajadores de edad  $x$  una vez que se jubilen a la edad establecida  $x_r$  y hasta el momento de su fallecimiento, es decir, mientras permanezca con vida (pensión de jubilación), cuyo importe deflactado en el origen será  $(\theta \cdot w_{x+r-1})$ .

$$K = (\theta \cdot w_{x+r-1}^*) \cdot l_x \cdot \left[ \left( \frac{1}{1+i} \right)^{x_r-x_0} \cdot {}_{x_r-x_0}p_{x_0} + (1+c)^1 \left( \frac{1}{1+i} \right)^{x_r-x_0+1} \cdot {}_{x_r-x_0+1}p_{x_0} + (1+c)^2 \left( \frac{1}{1+i} \right)^{x_r-x_0+2} \cdot {}_{x_r-x_0+2}p_{x_0} + \dots \right]$$

$$= (\theta \cdot w_{x+r-1}) \cdot l_x \cdot \left[ (1+c)^{x_r-x_0} \cdot \left( \frac{1}{1+i} \right)^{x_r-x_0} \cdot {}_{x_r-x_0}p_{x_0} + (1+c)^{x_r-x_0+1} \left( \frac{1}{1+i} \right)^{x_r-x_0+1} \cdot {}_{x_r-x_0+1}p_{x_0} + \dots \right]$$

Igualando los dos términos de la ecuación de Kaan,  $P = K$ , obtendremos los resultados deseados<sup>20</sup>. Así, para una prestación de jubilación dada, se obtendrán las aportaciones necesarias que hagan que se cumpla el principio de equivalencia colectivo. Partiendo de lo anterior, si se establece que el rédito anual de capitalización efectivo  $i$  es igual a la inflación  $c$ ; es decir,  $c = i$ , y dado que  $x_h = x + h$ , entonces:

$$P = (t_n \cdot w_0) \cdot l_x \cdot \left[ 1 + (1+c)^1 \left( \frac{1}{1+i} \right)^1 \cdot {}_1p_{x_0} + \dots + (1+c)^{x_r-x_0-1} \left( \frac{1}{1+i} \right)^{x_r-x_0-1} \cdot {}_{x_r-x_0-1}p_{x_0} \right]$$

$$= (t_n \cdot w_0) \cdot l_x \cdot [1 + {}_1p_x + {}_2p_x + {}_3p_x + \dots + {}_{r-1}p_x]$$

<sup>20</sup> Recuérdese que, en el ámbito de los sistemas de previsión social contributivos, todo sistema financiero actuarial de financiación debe buscar su equilibrio, teniéndose que verificar la ecuación de Kaan.

y

$$K = (\theta \cdot w_{x+r-1}) \cdot l_x \cdot \left[ (1+c)^{x-x_0} \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^{x-x_0} \cdot {}_{x-x_0}p_{x_0} + (1+c)^{x-x_0+1} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{x-x_0+1} \cdot {}_{x-x_0+1}p_{x_0} + \dots \right]$$

$$= (\theta \cdot w_{x+r-1}) \cdot l_x \cdot [{}_r p_x + {}_{r+1}p_x + {}_{r+2}p_x + {}_{r+3}p_x + \dots + {}_{w-x}p_x]$$

aplicando la ecuación de Kaan en la que P=K, se obtiene:

$$\theta \cdot w_{x+r-1} = t_n \cdot w_0 \cdot \frac{(1 + p_x + {}_2p_x + {}_3p_x + {}_4p_x + {}_5p_x + \dots + {}_{r-1}p_x)}{({}_r p_x + {}_{r+1}p_x + {}_{r+2}p_x + {}_{r+3}p_x + \dots + {}_{w-x}p_x)}$$

siguiendo lo establecido con anterioridad, entonces:

$$\theta \cdot w_{x+r-1} = t_n \cdot w_0 \frac{l_x \cdot (1 + p_x + {}_2p_x + {}_3p_x + \dots + {}_{r-1}p_x)}{l_{x+r} \cdot (1 + p_{x+r} + {}_2p_{x+r} + {}_3p_{x+r} + \dots + {}_{w-x-r}p_{x+r})}$$

ya se ha definido la esperanza de vida a la edad x + r como:

$$e_{x+r} = p_{x+r} + {}_2p_{x+r} + {}_3p_{x+r} + \dots + {}_{w-x-r}p_{x+r}$$

y los años de cotización esperados a la edad x como:

$$e_x^a = p_x + {}_2p_x + {}_3p_x + \dots + {}_{r-1}p_x$$

entonces:

$$\theta \cdot w_{x+r-1} = t_n \cdot w_0 \cdot \frac{1 + e_x^a}{{}_r p_x \cdot (1 + e_{x+r})}$$

Por consiguiente, se puede concluir que, bajo las hipótesis que se han establecido, en un sistema financiero gestionado por la técnica de la capitalización individual de prestación definida en el que el rédito anual de capitalización es igual al tanto anual de inflación (no existe pérdida de poder adquisitivo), si se aporta desde que se comienza a trabajar hasta la jubilación unas cotizaciones que se revalorizan según la inflación, entonces el valor actual de la pensión vitalicia (revalorizada y revalorizable también a la inflación) que se percibirá a partir de la edad de jubilación es igual a la aportación inicial  $(t_n \cdot w_0)$  multiplicada por una relación biométrica establecida por el cociente entre los años esperados de cotización más uno  $(1+e_x^a)$  y la esperanza de vida a la edad de jubilación más uno  $(1+e_{x+r})$  multiplicada por la probabilidad de alcanzar con vida la edad de jubilación  $({}_r P_x)$ . Tanto en el sistema de capitalización como en el de reparto hemos llegado a la siguiente igualdad:

$$\theta \cdot w_{x+r-1} = t_n \cdot w_0 \cdot \frac{1 + e_x^a}{{}_r P_x \cdot (1 + e_{x+r})}$$

Esto se cumple siempre que se comience a cotizar a la edad  $x$  (edad de entrada en el colectivo de activos), que la base de cotización (que es un porcentaje de su salario) se revalorice a la tasa anual  $\beta = C$ , que jubilándose a la edad  $x+n$  su pensión pagadera hasta su fallecimiento también se revalorice a la misma cuantía y, por último, que la inversión de los fondos acumulados (provisión matemática) genere una rentabilidad  $i$  igual a la cuantía de revalorización salarial  $\beta$ .

De lo anterior, se puede concluir que, bajo las hipótesis que se han establecido, tanto en un sistema financiero gestionado por la técnica de la capitalización individual como en un sistema financiero gestionado por la

técnica del reparto puro, donde en ambos se preserva el poder adquisitivo, entonces en ambos sistemas la pensión de jubilación en valor actual es igual a la aportación inicial multiplicada por la relación esperada (en términos de esperanza matemática) entre los activos y los pasivos. Finalmente se puede concluir que, bajo las hipótesis establecidas en nuestro modelo, como se ha demostrado, los dos sistemas de financiación son equivalentes. En consecuencia, en prestación definida y bajo las hipótesis establecidas, la mejora de la esperanza de vida le afecta por igual a un sistema gestionado por la técnica de la capitalización individual que a un sistema gestionado por la técnica de reparto, lo que significa que al sistema de capitalización de prestación definida le es también aplicable lo definido anteriormente sobre el factor de sostenibilidad.

### **3.2. Segundo modelo**

En el segundo modelo se modifican varias hipótesis planteadas en el primer modelo, manteniéndose el resto. Las variaciones son las siguientes:

- a) Dada la anterior equivalencia, tomamos como referencia, a los efectos de conocer la influencia de la esperanza de vida, el modelo de capitalización de prestación definida.
- b) La inflación,  $c$ , y el tipo de interés,  $i$ , fluctúan, sin tener por qué ser iguales tal y como se plantea como hipótesis en el primer modelo, donde la inflación y el tipo de interés son iguales.
- c) Se plantea que la productividad,  $k$ , a precios constantes, varía ejercicio a ejercicio, pudiendo ser tanto de manera creciente como decreciente.
- d) Se elimina la hipótesis de pleno empleo utilizada en el primer modelo.
- e) Se introduce la posibilidad de que existan flujos migratorios.



Por consiguiente, se abre el análisis a distintos escenarios económicos de tipos de interés, de inflación, de productividad y de empleo de dicha población. Es necesario dejar sentado que no es objeto del trabajo establecer la relación entre inflación, tipo de interés y productividad.

### 3.2.1. Formulación del segundo modelo

El sistema continúa siendo de prestación definida, es decir, la pensión es nuestro objetivo, por lo que partimos de la pensión como *input* del modelo. En el sistema de reparto, si se considera a  $\hat{l}_x = lx$  como la expresión del número esperado de trabajadores en activo a la edad  $x$ , entonces, bajo las hipótesis que se han establecido, la pensión puede expresarse a través de la siguiente ecuación:

$$\theta \cdot w_{x+(r-1)} = t_0 \cdot w_0 \cdot \frac{(\hat{l}_x + \hat{l}_{x+1} + \hat{l}_{x+2} + \hat{l}_{x+3} + \dots + \hat{l}_{x+r-1})}{(\hat{l}_{x+r} + \hat{l}_{x+r+1} + \hat{l}_{x+r+2} + \hat{l}_{x+r+3} + \dots + \hat{l}_w)}$$

Es decir, la pensión de jubilación que recibirá un activo al cabo de  $r$  años, si vive en su jubilación (en valor actual) está en relación directa con la cotización que realice multiplicada por un coeficiente que es el cociente del número total de activos esperados dividido entre el número total de pasivos esperados. Introducimos en la fórmula el factor de productividad  $k$  durante  $r$  años, de tal forma que transformamos la fórmula anterior en la siguiente:

$$\theta \cdot w_{x+(r-1)} = t_0 \cdot w_0 \cdot \frac{(\hat{l}_x + \hat{l}_{x+1} + \hat{l}_{x+2} + \hat{l}_{x+3} + \dots + \hat{l}_{x+r-1}) \cdot (1+k)^r}{(\hat{l}_{x+r} + \hat{l}_{x+r+1} + \hat{l}_{x+r+2} + \hat{l}_{x+r+3} + \dots + \hat{l}_w)}$$

Si tomamos lo siguiente:

- C: proyección del número de trabajadores ocupados

- D: proyección del número de jubilados

entonces la fórmula se transforma en:

$$\theta \cdot w_{x+(r-1)} = t_0 \cdot w_0 \cdot \frac{C \cdot (1+k)^r}{D} \quad [1]$$

Por otro lado, conocemos las fórmulas de la capitalización actuarial, donde tiene intrínseca la esperanza de vida en su formulación, como ya se ha visto. Tomamos los dos elementos de la ecuación de Kaan:

$$P = (t_n \cdot w_0) \cdot l_x \cdot \left[ 1 + (1+c)^1 \left( \frac{1}{1+i} \right)^1 \cdot {}_1P_{x_0} + \dots + (1+c)^{x_r-x_0-1} \left( \frac{1}{1+i} \right)^{x_r-x_0-1} \cdot {}_{x_r-x_0-1}P_{x_0} \right]$$

$$K = (\theta \cdot w_{x+(r-1)}) \cdot l_x \cdot \left[ (1+c)^{x_r-x_0} \cdot \left( \frac{1}{1+i} \right)^{x_r-x_0} \cdot {}_{x_r-x_0}P_{x_0} + (1+c)^{x_r-x_0+1} \left( \frac{1}{1+i} \right)^{x_r-x_0+1} \cdot {}_{x_r-x_0+1}P_{x_0} + \dots \right]$$

y si tomamos lo siguiente:

$$M = \left[ 1 + (1+c)^1 \left( \frac{1}{1+i} \right)^1 \cdot {}_1P_{x_0} + \dots + (1+c)^{x_r-x_0-1} \left( \frac{1}{1+i} \right)^{x_r-x_0-1} \cdot {}_{x_r-x_0-1}P_{x_0} \right]$$

$$N = \left[ (1+c)^{x_r-x_0} \cdot \left( \frac{1}{1+i} \right)^{x_r-x_0} \cdot {}_{x_r-x_0}P_{x_0} + (1+c)^{x_r-x_0+1} \left( \frac{1}{1+i} \right)^{x_r-x_0+1} \cdot {}_{x_r-x_0+1}P_{x_0} + \dots \right]$$

entonces tenemos la expresión de la pensión de la siguiente forma:

$$\theta \cdot w_{x+(r-1)} = t_0 \cdot w_0 \cdot \frac{l_x \cdot M}{l_x \cdot N} \quad [2]$$

Por tanto, tenemos dos expresiones de la pensión de jubilación: Por un lado la expresión [1] que contiene C, que es la proyección del número de

trabajadores ocupados; que contiene  $k$  que es la productividad de los trabajadores durante  $r$  años hasta su jubilación, y contiene  $D$  que es la proyección del número de jubilados. Y por otro lado la expresión [2] que contiene el retorno (TIR) de la pensión, a la vez que las probabilidades de supervivencia que conllevan al valor de la esperanza de vida. Para la misma pensión de jubilación y para las mismas aportaciones realizadas, es decir, igualando ambas expresiones [1] y [2] y despejando, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{M}{N} = \frac{(\hat{i}_x + \hat{i}_{x+1} + \hat{i}_{x+2} + \hat{i}_{x+3} + \dots + \hat{i}_{x+r-1}) \cdot (1+k)^r}{(\hat{i}_{x+r} + \hat{i}_{x+r+1} + \hat{i}_{x+r+2} + \hat{i}_{x+r+3} + \dots + \hat{i}_w)}$$

Si despejamos  $k$ , entonces:

$$k = \sqrt[r]{\frac{M \cdot D}{N \cdot C}} - 1$$

siendo:

k	Productividad de los trabajadores ocupados
r	Número de años de cotización
C	Proyección del número de trabajadores ocupados
D	Proyección del número de jubilados
M	Valor actual actuarial de las cotizaciones durante la vida activa del trabajador creciente a la inflación, $c$ , valorado a un rédito o tipo de interés de capitalización, $i$
N	Valor actual actuarial de la pensión que recibirá el trabajador una vez jubilado crecientes a la inflación, $c$ , valorado a un rédito o tipo de interés de capitalización, $i$
c	Inflación anual
i	Rédito anual ó retorno TIR ó tipo de interés de capitalización

Por consiguiente, obtenemos los parámetros del sistema de reparto que permitirán de una forma sostenible pagar una pensión objetivo calculada conforme a un modelo que recoge el efecto de la esperanza de vida, el modelo [2] y que otorga un retorno  $i$  al jubilado incrementándose anualmente a la inflación. En consecuencia, la pensión a percibir en el momento de la jubilación, en valor actual, revalorizable a la inflación, se formula como<sup>21</sup>:

$$\theta \cdot w_{x+(r-1)} = t_0 \cdot w_0 \cdot \frac{C \cdot (1+k)^r}{D} = t_0 \cdot w_0 \cdot \frac{M}{N}$$

donde:

$x$	Edad a la que se comienza a cotizar
$x+r$	Edad de jubilación
$\theta \cdot w_{x+r-1}$	Valor actual de la pensión de jubilación, revalorizable a la inflación desde el momento de la jubilación, expresada como un porcentaje $\theta$ del último salario $w_{x+r-1}$
$t_n \cdot w_0$	Valor actual del importe de la cotización anual, revalorizable a la inflación, expresada por la tasa de cotización $t_n$ , multiplicado por el salario en valor actual $w_0$

Siendo  $k$ , la productividad real deflactada de los trabajadores ocupados, que harán sostenible a dicha pensión:

$$k = \sqrt[r]{\frac{M \cdot D}{N \cdot C}} - 1$$

---

<sup>21</sup> Nuevamente, se trata de una equivalencia entre el sistema de reparto y el de capitalización individual para las pensiones de jubilación en prestación definida.

#### 4. Resultados

Una vez visto el enfoque teórico, entramos a ver qué resultados se observan al aplicar tanto el primer modelo como el segundo modelo al caso concreto español. Para ello se analizan los años comprendidos entre 1975 hasta 2048. Se parte de lo analizado en los dos modelos teóricos, corroborándose y verificándose el planteamiento de hipótesis en el siguiente sentido:

1ª: Con respecto al planteamiento de estructura demográfica estable, que se compone de los siguientes elementos: homogeneidad biométrica, independencia y estacionariedad, se verifica lo siguiente:

- a) Homogeneidad biométrica<sup>22</sup>: dado el número tan grande de elementos poblacionales observados que alcanza a toda la población activa en España en los años observados (desde 1975 hasta la actualidad) y en los años proyectados (desde la actualidad hasta 2048) se cumple en todo momento la hipótesis formulada de homogeneidad biométrica.
- b) Independencia<sup>23</sup>: al igual que ocurre con la homogeneidad biométrica, dado el número tan grande de elementos poblacionales observados, se cumple el principio de independencia.
- c) Estacionariedad<sup>24</sup>: se parte del principio de estacionariedad y, al observarse que existe un aumento sostenido de la esperanza de vida,

---

<sup>22</sup> En el modelo teórico planteado existe homogeneidad biométrica si para cualquier fenómeno aleatorio asociado a la vida, los individuos componentes del grupo son equivalentes entre sí; es decir, la función de distribución de probabilidad de la variante edad de muerte, edad de invalidez, etcétera, es igual para todos los individuos del grupo.

<sup>23</sup> En el modelo teórico planteado existe independencia si las respectivas variables aleatorias que están asociadas a cada individuo del grupo son estocásticamente independientes entre sí.

se analiza también la dinamicidad de esta importante realidad, cuantificándose lo que significa el citado aumento de la esperanza de vida<sup>25</sup> conforme transcurren los ejercicios económicos.

- d) Pirámide poblacional<sup>26</sup>: se analiza tanto desde la perspectiva en la que el número de nacidos permanece constante en el tiempo como desde la perspectiva de que el número de nacidos varía año a año<sup>27</sup>. A la vez, también se analiza cómo influyen los fenómenos migratorios. Así, se modelizan los movimientos migratorios siguiendo las hipótesis ofrecidas por el INE (2010).

2<sup>a</sup>: Con respecto a la estructura económica estable: se parte de una situación de pleno empleo y una estabilidad de dicho empleo, y también se analiza qué ocurre si no existe dicho pleno empleo, y existe una tasa de paro determinada, si bien en el modelo esa tasa de paro se mantiene constante a lo largo del tiempo. Por el lado de los salarios de los trabajadores activos, éstos crecen a la inflación. Queda fuera del perímetro del análisis la influencia de los ciclos económicos en las variables del modelo, así como la influencia de la productividad y la inflación en la

---

<sup>24</sup> En el modelo teórico planteado existe estacionariedad si las variables aleatorias biométricas dependen exclusivamente del tiempo biométrico o edad, sin influencia en ellas del tiempo físico.

<sup>25</sup> El aumento de la esperanza de vida se analiza a todas las edades, no sólo la esperanza de vida al nacer y en el sesenta y cinco cumpleaños. De esta manera se puede hacer un análisis de sensibilidad de lo que significa, entre otros, un aumento o disminución de la edad de jubilación.

<sup>26</sup> En el modelo teórico planteado se define que la pirámide poblacional es sostenible si el número de nacidos permanece constante en el tiempo. En el modelo teórico no se modelizan los fenómenos migratorios.

<sup>27</sup> En el caso de que el número de nacidos permanece constante en el tiempo, la dinamicidad de la pirámide poblacional se estructura entonces como una sucesión de cohortes con el mismo número de nacidos.

constitución de los tipos de interés y en la creación de empleo, en los flujos migratorios y en las tasas de natalidad, y viceversa.

En definitiva, se toma en consideración, como datos, los elementos clave en la financiación de las pensiones de jubilación, y que son:

1. El componente poblacional: tomando como base la pirámide poblacional, se tienen en cuenta las proyecciones de dicha población a largo plazo, influidas por la proyección de nacimientos, por la proyección de los movimientos migratorios, y la esperanza de vida<sup>28</sup> de los individuos a cada edad y su previsible evolución futura a largo plazo
2. La tasa de empleo: el componente del mercado de trabajo, en el que influye la fuerza laboral, la población activa y su proyección, la población ocupada, la tasa de paro y la población mayor con derecho a pensión
- 3.- La productividad<sup>29</sup> de la fuerza laboral
4. Los tipos de interés
5. La inflación

---

<sup>28</sup> Se analiza el componente biométrico: tomando en cuenta la función biométrica completa, de la que se desprende, como elemento fundamental, la esperanza de vida de los individuos a cada edad y su previsible evolución futura a largo plazo.

<sup>29</sup> Conforme a la Comunicación de la Comisión, de 21 de mayo de 2002, relativa a la productividad: la clave para la competitividad de las economías y empresas europeas, formalmente, la productividad del trabajo corresponde a la cantidad de trabajo necesario para producir una unidad de un bien concreto. Desde el punto de vista macroeconómico, la productividad del trabajo se mide mediante el producto interior de un país (PIB) por persona activa. El crecimiento de la productividad depende de la calidad del capital físico, de la mejora de las competencias de la mano de obra, de los avances tecnológicos y de las nuevas formas de organización. El crecimiento de la productividad es la fuente principal del crecimiento económico.

Para que el sistema de reparto esté en equilibrio –en definitiva, sea sostenible-, para una pensión determinada, se hallarán los parámetros de productividad, equivalente a un tipo de interés TIR del sistema de capitalización individual para el mismo modelo biométrico de supervivencia. Todo ello para el caso español, para el periodo comprendido entre 1975 y 2048, de manera que exista equivalencia entre ambos sistemas financieros<sup>30</sup>.

#### **4.1. Resultados del primer modelo**

A continuación se analizan los resultados que arroja el primer modelo, con el que se puede analizar aisladamente el efecto de la evolución de la esperanza de vida, demostrándose que el envejecimiento de la población tiene una trascendencia muy elevada. Para ello se han utilizado los datos de la esperanza de vida a cada edad del INE (2010) y su evolución a cada edad<sup>31</sup>. Se realizan las hipótesis de que no existen entradas ni salidas por migración, existe pleno empleo, la productividad es constante y los nacimientos se mantienen constantes a lo largo del tiempo. No es válido usar la evolución de la esperanza de vida que marcan las

---

<sup>30</sup> Es decir, dada la población española y su evolución hasta 2048 (proyección de la tasa de natalidad, de la esperanza de vida, así como de los movimientos migratorios), y dada unas determinadas tasas de inflación y de paro, se hallan los parámetros de productividad -en el sistema de reparto puro-, y de tipo de interés -en el sistema de capitalización individual- para que exista equivalencia entre ambos sistemas financieros, Asimismo, se aplican sensibilidades a los parámetros anteriormente descritos.

<sup>31</sup> Se ha analizado la evolución y proyección de la esperanza de vida en España a cada edad en los ejercicios 1975-2048. Datos del INE (2010). [http://www.ine.es/daco/daco42/demogra/hipotesis\\_09\\_48.xls](http://www.ine.es/daco/daco42/demogra/hipotesis_09_48.xls).



aseguradoras dado que éstas toman unos recargos de prudencia<sup>32</sup>, estando dichos recargos implícitos en las distintas tablas actuariales usadas por las aseguradoras o por los planes de pensiones<sup>33</sup>, lo que hace no aplicable dichas tablas a nuestro estudio. Por otro lado, además de los datos del INE sobre la evolución de la esperanza de vida desde 1975 hasta 2048, sin recargos que distorsionen los resultados y sin distinción por género, se ha construido un modelo de supervivencia de contraste de los datos del INE. Al primero lo denominamos “INE” y al segundo “MKH”, que, como se dice, nos sirve para contrastar los datos del primero. El modelo MKH utiliza ajustes biométricos a los datos poblacionales reales y realiza una proyección aplicando el modelo de incremento de la esperanza de vida que contienen las tablas actuariales PERM2000P, si bien, como se dice, ajustado a los datos poblacionales reales. En definitiva, el modelo biométrico MKH permite ver la bondad del modelo INE, sacando conclusiones sobre este último.

4.1.1. Resultados del primer modelo para los ejercicios 1975 – 2048, con los datos biométricos del INE y su comparativa versus MKH, con tipo de interés de capitalización igual a la inflación, con edad de jubilación a los 65, 67 y 70 años y con carreras laborales de 35, 37 y 40 años respectivamente

---

<sup>32</sup> Estos recargos son: (i) recargo para beneficios empresariales de las aseguradoras y/o (ii) recargos de seguridad para cumplir con los estrictos requisitos de solvencia impuestos por la legislación vigente a las aseguradoras y planes de pensiones, y por la propia antiselección que se da en el mercado privado por las personas que deciden la compra de una renta vitalicia. En definitiva, la esperanza de vida que arrojan las tablas actuariales de las aseguradoras o de los planes de pensiones reflejan un dato superior al que refleja una tabla actuarial de una población general.

<sup>33</sup> En España, las tablas actuariales comúnmente usadas en las aseguradoras para evaluar el riesgo de longevidad son las siguientes: durante los años 70, las GRMF70; durante los años 80, las GRMF80; durante los años 90, las GRMF95 y durante el arranque del siglo XXI, las PERMF2000P.

El gráfico 1 (que se verá más adelante) muestra los resultados para los ejercicios 1975 a 2048, por cada unidad monetaria de aportación (en valor actual) realizada desde la edad de entrada del trabajador en el sistema<sup>34</sup> hasta su edad de jubilación (a los 65, a los 67 o a los 70 respectivamente), siendo la aportación al sistema creciente anualmente a la inflación<sup>35</sup> y siendo, en el sistema de capitalización individual, el rédito de capitalización<sup>36</sup> igual a la inflación, y la productividad constante obteniéndose en el gráfico como resultado la pensión<sup>37</sup> de jubilación en valor actual<sup>38</sup> y su evolución desde 1975 hasta 2048.

El gráfico 1 muestra para los parámetros indicados en su cabecera los resultados hallados. Así, en el ejercicio 2048 para los datos INE se percibirá una pensión en valor actual (a valor de hoy) de 1,5 unidades monetarias<sup>39</sup>. Si en vez de jubilarse a los 65 años, se jubila a los 67,

---

<sup>34</sup> La edad de entrada del trabajador en el sistema es a la edad de 30 años. De esta manera se computa una carrera laboral completa de 35 años para el caso de jubilarse a los 65 años, o una carrera laboral completa de 37 años en caso de jubilación a los 67 años, o una carrera laboral completa de 40 años en caso de jubilación a los 70 años.

<sup>35</sup> Siendo la subida tanto de los salarios como de las pensiones igual a la inflación.

<sup>36</sup> También denominado tipo de interés de capitalización.

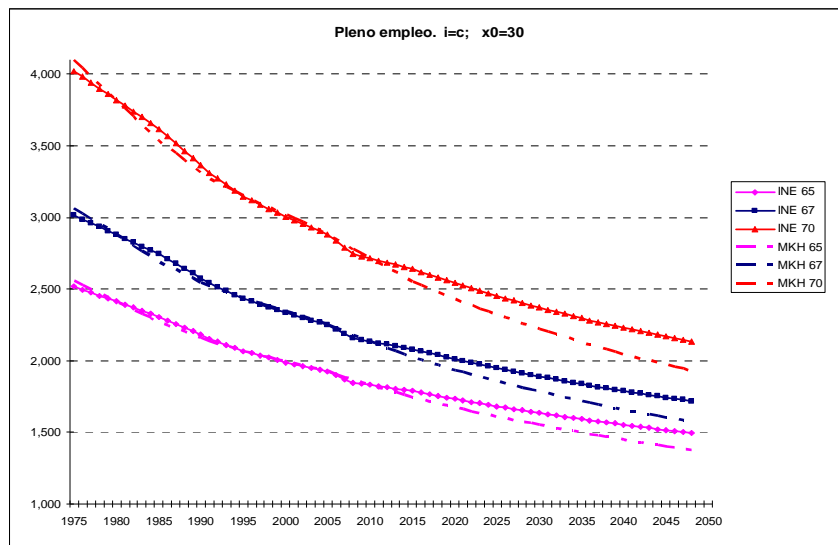
<sup>37</sup> La pensión, una vez que se acredita, es creciente anualmente a la inflación hasta el fallecimiento del jubilado.

<sup>38</sup> Así, para ambos sistemas –el de capitalización individual y el de reparto puro-, como se desprende del gráfico 1, para el ejercicio 1975, la pensión es de 2,5 unidades monetarias (a los 67 años la pensión sería de 3 unidades monetarias, mientras que a los 70 años sería de 4 unidades monetarias), resultando que para el ejercicio 2008 la pensión es de 1,8 unidades monetarias (a los 67 años la pensión sería de 2,2 unidades monetarias, mientras que a los 70 años sería de 2,8 unidades monetarias).

<sup>39</sup> En todos los gráficos presentados, siempre se considera que las cotizaciones son de una unidad monetaria cada año desde la edad de entrada del trabajador al

entonces su pensión sería de aproximadamente 1,75 unidades monetarias. A la vez, si en vez de jubilarse a los 65 se jubila a los 70 años<sup>40</sup> entonces percibiría algo superior a 2,1 unidades monetarias. Sólo las personas que se jubilasen en 2005 a los 65 años percibirían también en torno a 2,1 unidades monetarias. Así que retrasar la edad de jubilación de 65 a 70 años permite un reequilibrio muy importante si las cuentas de ingresos y gastos de la Seguridad Social estuvieran en desequilibrio.

Gráfico 1: Resultados del primer modelo para los ejercicios 1975 – 2048, con los datos biométricos del *INE* y su comparativa *versus MKH*, con tipo de interés de capitalización igual a la inflación, con edad de jubilación a los 65, 67 y 70 años y con carreras laborales de 35, 37 y 40 años respectivamente



Fuente: elaboración propia.

mundo laboral (a los 30 años) y hasta que se jubila, y dicha cotización crece a la inflación (al igual que los salarios). A la vez el trabajador, una vez jubilado, recibirá las unidades monetarias que se indican en el eje "y", que también crecerá cada año igual al crecimiento de los salarios.

<sup>40</sup> Como la edad de entrada al mercado laboral es a los 30 años, si alguien se jubila en vez de a los 65, se jubila a los 70 años, entonces habrá cotizado 40 años, a la vez que deja de percibir 5 años menos de pensión.

En el gráfico 1 se puede también observar la comparativa, dentro del primer modelo, entre los resultados con los modelos biométricos *ad hoc* basados en las proyecciones del INE<sup>41</sup> frente a los resultados con los datos biométricos *ad hoc* de MKH<sup>42</sup>, con tipo de interés igual a la inflación, con edad de jubilación a los 65, 67 y 70 años y con carreras laborales de 35, 37 y 40 años respectivamente. En el tramo hasta 2015 no se observa ninguna diferencia entre los datos biométricos del INE y los de MKH. Sin embargo, a partir de 2015, y hasta 2048, sí se encuentran diferencias, dada la mayor esperanza de vida que arrojan los de MKH.

#### 4.1.2. Aislamiento de la influencia de la esperanza de vida en las pensiones públicas de jubilación

A raíz de lo establecido en lo que hemos denominado 'Primer Modelo', en el gráfico 1 se puede observar cómo influye durante la primera mitad del Siglo XXI el aumento de la esperanza de vida en las pensiones en España. Dadas las hipótesis que se utilizan para la formulación del primer modelo, se consigue valorar la pensión de jubilación, a la vez que se aislar

---

<sup>41</sup> De manera abreviada, cuando nos referimos al modelo INE, nos estamos refiriendo al modelo biométrico que se desprende de las tablas actuariales *unisex* creadas *ad hoc* para los años 1975 a 2048, al único efecto del presente estudio y basadas en el modelo biométrico del INE que distingue por sexos.

<sup>42</sup> Asimismo, de manera abreviada, cuando nos referimos al modelo MKH, nos estamos refiriendo a un modelo que permite ver la bondad del modelo INE, sacando conclusiones sobre este último. El modelo MKH utiliza ajustes biométricos sobre los datos poblacionales reales y realiza una proyección construyendo aplicando el modelo de mejora de la esperanza de vida que contiene las tablas actuariales PERM2000, pero, como se dice, ajustado a los datos poblacionales reales y sin efecto del género con el único propósito de servir de contraste para el presente estudio.

el efecto biométrico que tiene la esperanza de vida<sup>43</sup> sobre la pensión de jubilación<sup>44</sup>, lo que permite conocer cómo el aumento significativo de la esperanza de vida influye, o mejor dicho debería influir, en la cuantía de las pensiones. Y se vive más no sólo a partir de la edad de jubilación, sino que se vive más a cualquier edad, por lo que la probabilidad de pagar las cotizaciones durante la etapa de trabajador también es mayor, por lo que este efecto también se debe ver reflejado en la corrección que pretende introducir la Ley 27/2011. Utilizando los resultados biométricos del INE, y para tres edades distintas de jubilación (65, 67 y 70), sólo por el efecto biométrico de vivir más, la pensión de jubilación en 2048 debería ser, si la jubilación es a los 65, un 25% menos que la que se hubiera ofrecido en 2000 bajo las mismas circunstancias por el aumento de la esperanza de vida. Para el caso de 70 años, la diferencia aumenta hasta casi un 30%<sup>45</sup>. También se comparan los resultados biométricos del INE *versus* los datos biométricos MKH. Si se toman exclusivamente los aspectos derivados de la esperanza de vida y los aspectos exclusivamente biométricos, se observa una influencia en la pensión del 2048, que debería ser entre casi un 40% menos (con datos INE) y un 53% menos (con datos MKH) que la que se hubiera ofrecido en 1975 bajo las mismas circunstancias<sup>46</sup>.

#### 4.2. Resultados del segundo modelo

Siguiendo el citado modelo se hallan los parámetros de productividad en el sistema de reparto, para el caso español, para el periodo 1975-2048, dada una determinada tasa de inflación, tasa de paro, y de tipo

---

<sup>43</sup> Y de la probabilidad de alcanzar con vida una determinada edad.

<sup>44</sup> Por la propia formulación resultante.

<sup>45</sup> La diferencia es mayor a los 70 que a los 65 porque la mejora porcentual de la esperanza de vida es mayor a los 70 años que a los 65 años.

<sup>46</sup> El modelo MKH prevé una mayor esperanza de vida frente al modelo INE en todas las edades.

de interés –en el sistema de capitalización individual-. Asimismo, se aplican sensibilidades a los parámetros anteriormente descritos. Lo fundamental en este segundo modelo es que no se usa una población teórica, sino que se parte de la población real española y su evolución hasta 2048, incorporando la proyección de la tasa de natalidad, así como de los movimientos migratorios. Así, a diferencia con respecto al primer modelo, en éste se halla el parámetro de productividad necesario para la pensión objetivo determinada, introduciendo la realidad de evolución y proyección de la población en España para el periodo descrito (1975-2048), es decir, la realidad y proyección de la tasa de natalidad, así como de los movimientos migratorios, todo ello conforme a los datos que ofrece el INE (2010).

Al utilizarse datos reales poblacionales (movimientos migratorios proyectados por el INE y decrecimiento en los nacimientos), se genera que la curva de productividad esté influenciada fundamentalmente por los movimientos migratorios ocurridos en España en la última década del siglo XX<sup>47</sup>. La curva de productividad crece y decrece por la compensación que se produce por los movimientos migratorios<sup>48</sup> ya que esa mayor fuerza laboral derivada de la inmigración compensa a un menor incremento de productividad. La forma de leer los resultados de pensión son de la misma forma que los obtenidos en el primer modelo, lo que cambia es el aumento de pensión al calcular productividad. Para comparar, se incluye una hipótesis de pleno empleo. También para comparar se usa el 5% de tipo de interés de capitalización junto con el 3% de inflación, y el 6,5% de tipo de

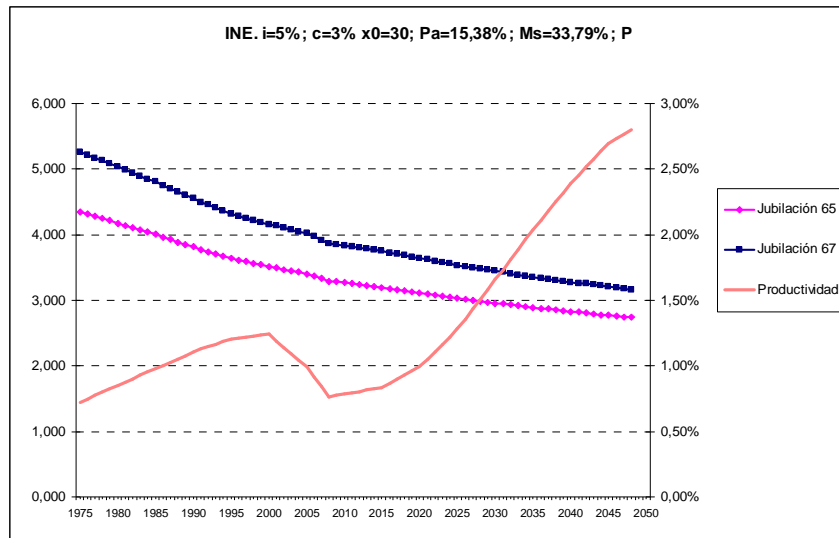
---

<sup>47</sup> La razón por la que desde 1975 y hasta mediados de los 90 el resultado de la productividad siempre es creciente es porque al alargarse la esperanza de vida es necesario que las personas trabajando aumenten su productividad para generar bienes y servicios suficientes para una mayor población jubilada, cosa que pasó y compensó ese aumento de esperanza de vida.

<sup>48</sup> Nos referimos al fuerte movimiento de inmigración que se produjo entre los ejercicios 2000 y 2008.

interés de capitalización junto con el 3,5% de inflación. Ello hace que en el caso del 6,5% se mejoren los resultados de pensión, pero a la vez sea necesaria una mayor productividad para alcanzar dichos resultados.

Gráfico 2: Resultados de productividad equivalente para la población española 1975–2048, con tasa de paro del 15,38% y tasa de mayores sin derecho a pensión del 33,79%, con datos de las proyecciones del modelo INE, con tipo de interés de capitalización del 5% e inflación del 3%, edad de jubilación 65 y 67 años y con carreras laborales de 35 y 37 años respectivamente



Fuente: elaboración propia.

El gráfico anterior 2 refleja una tasa de paro del 15,38%<sup>49</sup> y una tasa de personas mayores sin derecho a pensión del 33,79%<sup>50</sup>. Ello hace que

<sup>49</sup> Se ha utilizado este dato del 15,38% porque es la media de las tasas de desempleo desde 1991 hasta 2010.

<sup>50</sup> Se define como personas mayores sin derecho a pensión a aquellas que han cumplido ya la edad ordinaria de jubilación y no tienen remuneración de pensión propia, excluyendo por tanto las derivadas por derechos originados por otros, como

para obtener los resultados de pensión equivalente al pleno empleo, sea necesaria una mayor productividad para alcanzar dichos resultados.

Conforme a los datos ofrecidos por el gráfico 2, la pensión de jubilación en 2048 debería ser, si la jubilación es a los 65, un 23% menos que la que se hubiera ofrecido en 2000 bajo las mismas circunstancias por el aumento de la esperanza de vida a todas las edades. Los resultados del segundo modelo también verifican que retrasar la edad de jubilación es una medida efectiva.

Los resultados de este segundo modelo se ofrecen para dos edades distintas de jubilación (65 y 67) e indican que, en el ejercicio 2048, para los datos INE, se percibiría a los 65 años una pensión en valor actual de 2,7 unidades monetarias. Si en vez de jubilarse a los 65 años, se jubilase a los 67, entonces su pensión sería de aproximadamente 3,2 unidades monetarias, resultando que las personas que se jubilasen en 2018 a los 65 años percibirían también 3,2 unidades monetarias.

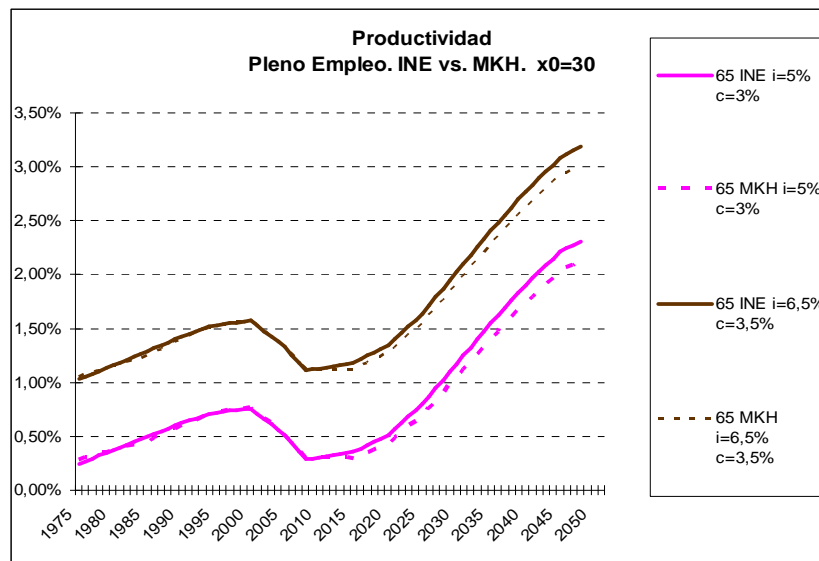
Así, retrasar la edad de jubilación de 65 a 67 años permite un reequilibrio importante si las cuentas de ingresos y gastos de la Seguridad Social estuvieran en desequilibrio.

---

es la de viudedad. Se ha utilizado el dato del 33,79% porque es la media desde 1991 hasta 2010 de las tasas de conversión de fuerza laboral (total personas de 16 a 64 años) a población activa. Por tanto, se considera que esas personas nunca alcanzarán derecho a pensión. Asimismo, más adelante, en el gráfico 4, se utilizará el 38,88% que es el resultado de la semisuma del dato anterior con el dato de conversión de fuerza laboral a población ocupada. En este caso, se considera que la mitad de las personas que están en paro no llegarán a cumplir los requisitos para recibir una pensión contributiva, que son las que son objeto de este estudio.



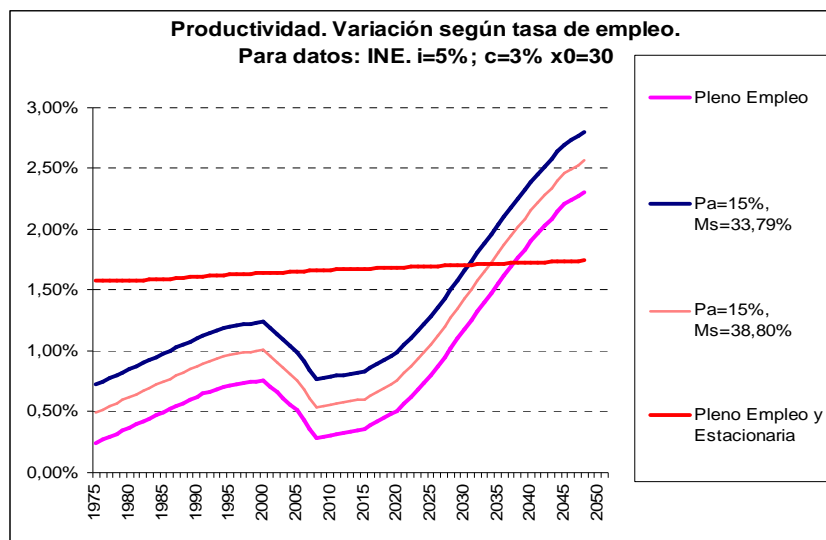
Gráfico 3: Comparativa de resultados de productividad equivalente entre distintos tipos de interés (5% y 6,5%) e inflación (3% y 3,5%), distintos modelos (INE y MKH), para la población española 1975–2048 en pleno empleo.



Fuente: elaboración propia.

En el gráfico 3 se presenta una comparativa de resultados de productividad equivalente entre distintos tipos de interés (5% y 6,5%) e inflación (3% y 3,5%), distintos datos biométricos (INE y MKH), para la población española 1975–2048 en pleno empleo. Queda claro que para que la productividad en el sistema de reparto pueda alcanzar a la capitalización en prestación definida, a mayor tipo de interés, mayor necesidad de productividad. En el gráfico 4 se presenta una comparativa de resultados de productividad equivalente entre distintas tasas de empleo para la población española 1975–2048, con el modelo INE con tipo de interés del 5% e inflación del 3%. Queda claro que a mayor tasa de paro mayor necesidad de crecimiento de la productividad, y que una población estacionaria marca una estabilidad en la necesidad de crecimiento de la productividad.

Gráfico 4: Comparativa de resultados de productividad equivalente entre distintas tasas de empleo para la población española 1975–2048, con el modelo INE con tipo de interés del 5% e inflación del 3%



Fuente: elaboración propia.

## 5. Conclusiones

1. Los dos modelos de sostenibilidad que aquí se proponen se basan en seis parámetros: el primer parámetro, la esperanza de vida; el segundo, la natalidad; el tercero, los movimientos migratorios; el cuarto, la tasa de paro; el quinto, la productividad y el sexto y último, la inflación. Se comienza con un primer enfoque (primer modelo), simplificando la realidad, que evoluciona hacia una segunda aproximación más compleja (segundo modelo). Del primer modelo se concluye que, en un sistema financiero gestionado por la técnica del reparto puro en el que la estructura demográfica permanece estable, en pleno empleo y su productividad constante, y donde se actualizan tanto las pensiones como las aportaciones al mismo índice (inflación o productividad, pero el mismo), donde los

trabajadores aportan desde que comienzan a trabajar hasta la jubilación unas cotizaciones que se revalorizan según el citado índice, entonces el valor actualizado de la pensión vitalicia que se percibirá a partir de la edad de jubilación (revalorizable también al índice) es igual al valor actualizado de las aportaciones multiplicado por una relación biométrica establecida por el cociente entre los años esperados de cotización más uno, y la esperanza de vida a la edad de jubilación más uno, y todo ello multiplicado por la probabilidad de alcanzar con vida la edad de jubilación.

2. En el contexto de la sostenibilidad de las pensiones descrito en el punto anterior se ha demostrado que, contemplando la totalidad de las cotizaciones al sistema a los efectos de calcular la pensión, si el sistema financiero de capitalización individual en prestación definida otorga un retorno (rendimiento) igual al índice de revalorización de salarios y pensiones, entonces da idéntico resultado al reparto puro; es decir, la pensión a percibir por los jubilados es idéntica en ambos sistemas y, por tanto, es independiente del sistema de financiación utilizado. En consecuencia, en prestación definida y bajo las hipótesis establecidas, la mejora de la esperanza de vida le afecta por igual a un sistema gestionado por la técnica de la capitalización individual que a un sistema gestionado por la técnica de reparto, lo que significa que, en cuanto a factor de sostenibilidad, al sistema de capitalización de prestación definida le es también aplicable lo que se defina en el primer modelo.

3. De los puntos anteriores se concluye que, como elemento de sostenibilidad de las pensiones, es necesario contemplar la totalidad de las aportaciones de la vida laboral a los efectos de calcular la pensión. Si para el cálculo no se contempla la totalidad de la vida laboral, el sistema no reúne los requisitos mínimos de sostenibilidad.

4. También se concluye que, como elemento de sostenibilidad de las pensiones, es necesario que el factor de revalorización de las pensiones guarde estrecha relación con la revalorización de los salarios, de tal forma que si los salarios incrementan a la inflación, entonces las pensiones pueden variar con la inflación; y si los salarios incrementan a la productividad, entonces las pensiones pueden variar con la productividad.

5. Asimismo, de los puntos anteriores se concluye que se podría utilizar como factor de sostenibilidad una reducción del crecimiento de las pensiones de manera automática en función del aumento observado de la esperanza de vida en la edad de jubilación. Así, cada cinco años, se igualaría  $VAA [t]$  y  $VAA [t+5]$ , siendo  $VAA [t]$  el valor actual actuarial a la edad de jubilación de la pensión creciente a la inflación  $c$  conforme a la esperanza de vida en  $t$ , y siendo  $VAA [t+5]$  el valor actual actuarial a la misma edad de jubilación de la misma pensión, pero creciente a un nuevo parámetro “ $c-fs$ ” conforme a la esperanza de vida en  $t+5$ , hallando entonces  $fs$ , que es el factor de sostenibilidad.

6. Los resultados que arroja el primer modelo permiten analizar aisladamente el efecto de la evolución de la esperanza de vida, demostrándose que el envejecimiento de la población tiene una trascendencia muy elevada. Se han utilizado los datos desde 1975 hasta 2048 de la esperanza de vida a cada edad del INE (2010) y su evolución a cada edad. Y además de los datos del INE, se ha construido un modelo de supervivencia de contraste que hemos denominado MKH, observándose que desde 1975 hasta 2015 no se observa ninguna diferencia entre los datos biométricos del INE y los de MKH y, sin embargo, a partir de 2015 y hasta 2048, se encuentran diferencias, dada la mayor esperanza de vida que arrojan los de MKH *versus* la proyección del INE.

7. Dadas las hipótesis que se utilizan para la formulación del primer modelo, se consigue valorar la pensión de jubilación aislando el efecto biométrico que tiene la esperanza de vida sobre la pensión de jubilación, lo que permite conocer cómo el aumento significativo de la esperanza de vida influye en la cuantía de las pensiones. Y se vive más no sólo a partir de la edad de jubilación, sino que se vive más a cualquier edad, por lo que la probabilidad de pagar las cotizaciones durante la etapa de trabajador también es mayor, por lo que este efecto también se debe ver reflejado en la corrección que pretende introducir el factor de sostenibilidad de la Ley 27/2011. Utilizando los resultados biométricos del INE, sólo por el efecto biométrico de vivir más, la pensión de jubilación en 2048 debería ser, si la jubilación es a los 65, un 25% menos que la que se hubiera ofrecido en 2000 bajo las mismas circunstancias por el aumento de la esperanza de vida a todas las edades.

8. Los resultados del primer modelo verifican que retrasar la edad de jubilación es una medida efectiva. Los resultados de este primer modelo se ofrecen para tres edades distintas de jubilación (65, 67 y 70) e indican que, en el ejercicio 2048 y para los datos INE, se percibiría a los 65 años una pensión en valor actual de 1,5 unidades monetarias. Si en vez de jubilarse a los 65 años, se jubilara a los 67, entonces su pensión sería de aproximadamente 1,75 unidades monetarias. A la vez, si en vez de jubilarse a los 65 se jubilara a los 70 años entonces percibiría algo superior a 2,1 unidades monetarias, resultando que las personas que se jubilasen en 2005 a los 65 años percibirían también 2,1 unidades monetarias.

Así, retrasar la edad de jubilación de 65 a 70 años permite un reequilibrio muy importante si las cuentas de ingresos y gastos de la Seguridad Social estuvieran en desequilibrio.

9. Transformando ligeramente el primer modelo propuesto se puede analizar aisladamente el efecto de la evolución de la esperanza de vida en la jubilación, acercándose este modelo al modelo portugués y al finlandés, observándose en la sostenibilidad sólo el envejecimiento de la población en la jubilación. Así, la nueva pensión de jubilación se obtiene multiplicando la pensión de jubilación previa a la subida de la esperanza de vida, por el cociente que forman uno más la antigua esperanza de vida dividido por uno más la nueva esperanza de vida. En conclusión, si se quiere sólo tener en cuenta el aumento de la esperanza de vida en el factor de sostenibilidad, se propone esta fórmula actuarial como citado factor, de tal manera que, como marca la ley, cada cinco años se observen en la edad de jubilación las esperanzas de vida en  $t$  y en  $t+5$ , y la nueva pensión de jubilación en  $t+5$  se obtenga multiplicando a la pensión de jubilación en  $t$ , por el cociente que forman uno más la antigua esperanza de vida en  $t$  [ev1] dividido por uno más la nueva esperanza de vida en  $t+5$  [ev2].

10. En términos prácticos, conforme al primer modelo, si transcurrido el periodo de observación de cinco años la esperanza de vida a la edad de jubilación aumenta un año, pasando de 19 a 20 años, entonces, para que el sistema siga siendo sostenible, la pensión de jubilación se debería ver mermada en un 4,76%, a no ser que algún otro elemento compense esa merma del 4,76%, como puede ser una mejora en la natalidad, en la migración, en el desempleo o en la productividad de los trabajadores en activo. Por consiguiente, de la reflexión de que alguno de los citados elementos compense al aumento de la esperanza de vida, el primer modelo, evoluciona hacia una segunda aproximación más compleja, que hemos denominado segundo modelo.

11. En el segundo modelo se modifican varias hipótesis planteadas en el primero, manteniéndose el resto. Las variaciones son: (i) dada la anterior equivalencia, se toma como referencia, a los efectos de conocer la

influencia de la esperanza de vida, el modelo de capitalización de prestación definida; (ii) la inflación,  $c$ , y el tipo de interés,  $i$ , fluctúan, sin tener por qué ser iguales tal y como se plantea como hipótesis en el primer modelo; (iii) la productividad,  $k$ , a precios constantes, varía ejercicio a ejercicio, pudiendo ser tanto de manera creciente como decreciente, frente a la hipótesis de productividad constante del primer modelo; (iv) se elimina la hipótesis de pleno empleo; (v) se introduce la posibilidad de que existan flujos migratorios. Siguiendo el segundo modelo se hallan los parámetros de productividad en el sistema de reparto, para el caso español y el periodo 1975-2048, dadas una determinada tasa de inflación, tasa de paro y de tipo de interés.

Lo fundamental en este segundo modelo es que no se usa una población teórica, sino que se parte de la población real española y su evolución hasta 2048, incorporando la proyección de la tasa de natalidad, así como de los movimientos migratorios. Así, a diferencia del primer modelo, en éste se halla el parámetro de productividad necesario para la pensión objetivo determinada, introduciendo la realidad de evolución y proyección de la población en España para el periodo descrito.

Al utilizarse datos reales poblacionales la curva de productividad está influida fundamentalmente por los movimientos migratorios ocurridos en España en la última década del siglo XX. La curva de productividad crece levemente hasta el año 2000 y después decrece hasta el 2008 por la compensación que se produce por los movimientos migratorios ya que esa mayor fuerza laboral derivada de la inmigración compensa a un menor incremento de productividad, y vuelve a crecer hasta 2048 para compensar la negativa proyección demográfica del INE en términos de nacimientos y movimientos migratorios.

12. El gráfico 2 refleja los resultados de productividad equivalente para la población española 1975–2048, con tasa de paro del 15,38% y tasa de mayores sin derecho a pensión del 33,79%, con datos de las proyecciones del modelo INE, con tipo de interés de capitalización del 5% e inflación del 3%, edad de jubilación 65 y 67 años y con carreras laborales de 35 y 37 años respectivamente. Ello hace que para obtener los resultados de pensión equivalente al pleno empleo, sea necesaria una mayor productividad. Se observa que la pensión de jubilación en 2048 debería ser, si la jubilación es a los 65, un 23% menos que la que se hubiera ofrecido en 2000 bajo las mismas circunstancias por el aumento de la esperanza de vida a todas las edades, cuestión que va en línea con los resultados del primer modelo. Los resultados de este segundo modelo se ofrecen para dos edades distintas de jubilación (65 y 67) e indican que, en el ejercicio 2048 y para los datos INE, se percibiría a los 65 años una pensión en valor actual de 2,7 unidades monetarias (mayor que en el primer modelo, fundamentalmente por el incremento de productividad introducido). Los resultados del segundo modelo también verifican que retrasar la edad de jubilación es una medida efectiva y, si en vez de jubilarse a los 65 años se jubilase a los 67, entonces su pensión sería de aproximadamente 3,2 unidades monetarias, resultando que las personas que se jubilasen en 2018 a los 65 años percibirían también 3,2 unidades monetarias. Así, retrasar la edad de jubilación permite también un reequilibrio importante si las cuentas de ingresos y gastos de la seguridad social estuvieran en desequilibrio.

13. El gráfico 3 refleja una comparativa de resultados de productividad equivalente entre distintos tipos de interés (5% y 6,5%) e inflación (3% y 3,5%), distintos modelos (INE y MKH), para la población española 1975–2048 en pleno empleo, quedando claro que para que la productividad en el sistema de reparto pueda alcanzar a la capitalización en prestación definida, a mayor tipo de interés, mayor necesidad de productividad.



14. Por su parte, el gráfico 4 refleja una comparativa de resultados de productividad equivalente entre distintas tasas de empleo para la población española 1975–2048, con el modelo INE con tipo de interés del 5% e inflación del 3%, quedando claro que a mayor tasa de paro mayor necesidad de crecimiento de la productividad y que una población estacionaria marca una estabilidad en la necesidad de crecimiento de la productividad.

---

---

Fecha de recepción del artículo: 22 de abril de 2013

Fecha de aceptación definitiva: 9 de mayo de 2013

---

---

## Bibliografía

[1] AXA (2013): *Estudio AXA sobre Esperanza de Vida en España*. Madrid. [http://www.axa.es/Seguros/imagenes/NP%20Esperanza%20de%20Vida\\_tc\\_m5-10687.pdf](http://www.axa.es/Seguros/imagenes/NP%20Esperanza%20de%20Vida_tc_m5-10687.pdf). (26 de marzo de 2013).

[2] Comisión Europea (2009): *The 2009 Ageing Report - Economic and budgetary projections for the UE-27 Member States (2008-2060)*. European Economy 2/2009.

[3] Comisión Europea (2012a): *An Agenda for Adequate, Safe and Sustainable Pensions*. White Paper. EU. Brussels.

[4] Comisión Europea (2012b): *The 2012 Ageing Report - Economic and budgetary projections for the 27 EU Member States (2010-2060)*. European Economy 2/2012.

[5] Devesa, J.E. (2011): "Sobre la sostenibilidad del sistema reformado de pensiones de jubilación español". *Actuarios*, nº 26. Págs. 11-13.

[6] Devesa, J.E.; M. Devesa; I. Domínguez; B. Encinas; R. Meneu y A. Nagore (2012): "El factor de sostenibilidad en el sistema de pensiones español: regulaciones alternativas y efectos sobre los jubilados". *Actuarios*, nº 31. Dossier.

[7] González Rabanal, M.C. y L.M. Sáez de Jáuregui (2008): *Influencia de la inmigración en el coste de las pensiones de jubilación. Análisis cuantitativo del previsible abaratamiento de las mismas para el caso español*. Ministerio de Trabajo e Inmigración. Madrid.

[8] González Rabanal, M.C. y L.M. Sáez de Jáuregui (2012): "Gender Discrimination in Non-Insured Employment Pension Plans: The Impact of EU Directives". *Ekonomi-tek*. Volume Cilt: 1, May 2012, nº 2. Págs. 61-88.

[9] Instituto Nacional de Estadística (2010): *Datos demográficos población nacional 1975-2010*.

[http://www.ine.es/daco/daco42/demogra/hipotesis\\_09\\_48.xls](http://www.ine.es/daco/daco42/demogra/hipotesis_09_48.xls). (21 de octubre de 2012).

[10] Instituto Nacional de Estadística (2010): *Proyección de la población a largo plazo. Parámetros de evolución demográfica 2009-2048*.

[http://www.ine.es/daco/daco42/demogra/hipotesis\\_09\\_48.xls](http://www.ine.es/daco/daco42/demogra/hipotesis_09_48.xls). (21 de octubre de 2012).

[11] Ley 27/2011, de 1 de agosto, sobre actualización, adecuación y modernización del sistema de Seguridad Social.

[12] Ley Orgánica 2/2012, de 27 de abril, de Estabilidad Presupuestaria y Sostenibilidad Financiera.

[13] López Cachero, M. y J. López de la Manzanara (1996): *Estadística para actuarios*. Mapfre. Madrid.

[14] Nieto de Alba, U. y J. Vegas Asensio (1993): *Matemática Actuarial*. Mapfre. Madrid.

[15] Real Decreto-ley 5/2013, de 15 de marzo, de medidas para favorecer la continuidad de la vida laboral de los trabajadores de mayor edad y promover el envejecimiento activo.

[16] Vidal Meliá, C.; M.C. Boado Penas y O. Settergren (2009): "Automatic Balance Mechanisms in Pay-As-You-Go Pension Systems". *The Geneva Papers on Risk and Insurance: Issues and Practice*, 33 (4). Págs. 287-317.

[17] Sáez de Jáuregui, L.M. (1994): "El Futuro Incierto de las Pensiones", *Actuarios*, nº 11. Págs. 21-25.

[18] Sáez de Jáuregui, L.M. (1997): "La Reforma Francesa del Sistema de Protección Social". *Actuarios*, nº 14. Págs. 24-29.

[19] Sáez de Jáuregui, L.M. (2011): "¿Está cerrada la reforma de la Seguridad Social con la Ley 27/2011? Múltiples aspectos que han quedado abiertos". *Actuarios*, nº 26. Págs. 6-10.

[20] Sáez de Jáuregui, L.M. (2013): "Pensiones: se reabre la caja de Pandora". *Diario El Economista*. 23 de marzo de 2013. Pág. 6.

[21] Sáez de Jáuregui, L.M. (2013): "Pensiones: poner el cascabel al gato". *Diario Cinco Días*. 22 de abril de 2013. Pág. 11.